

Contenido

1. INTRODUCCIÓN	4
2. CONCEPTOS DE ANÁLISIS Y DINÁMICA ESTRUCTURAL	4
3. CONCEPTOS DE CONCRETO REFORZADO	4
3.1 TECNOLOGÍA DEL CONCRETO	5
3.1.2 Fundamentos básicos	5
3.1.3 Diagrama esfuerzo - deformación.....	6
3.1.2 Módulo de elasticidad.....	10
3.1.3 Relación poisson's	11
3.1.4 Módulo de rotura	11
3.2 ACERO DE REFUERZO	12
3.2.1 Definición y clasificación	12
3.2.2 Módulo de elasticidad y límite de fluencia	14
3.3 ADHERENCIA ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO	14
3.3.1 Generalidades	16
3.3.2 Traslapos de barras a tracción	16
3.3.3 Traslapos de barras a compresión	18
3.3.4 Ganchos de 90,135 y 180 grados	19
3.3.5 Longitudes de desarrollo de barras a tracción con gancho a 90 grados	20
3.4 DURABILIDAD	20
3.4.1 Recubrimiento mínimo	21
3.5 FUNCIONAMIENTO	22
3.5.1 Introducción.....	22
3.5.2 Control de deflexiones	23
3.5.2.1 Ejemplo de aplicación 1	24
3.5 VIGAS Y/O VIGUETAS	29
3.5.1 Flexión.....	29
3.5.1.1 Diagramas de cortante y momento.....	29
3.5.1.2 Esfuerzos de flexión en vigas.....	34
3.5.1.3 Comportamiento de vigas de concreto.....	37
3.5.1.3.1 Concreto no agrietado:	38
3.4.1.3.2 Concreto agrietado – Etapa de esfuerzos elásticos.....	38
3.5.1.3.3 Resistencia última	41
3.5.1.3.4 Diagrama momento - curvatura.....	43
A continuación, se presenta el grafico de este diagrama momento curvatura.....	48
3.5.1.4 Métodos de diseño	48
3.5.1.4.1 Método elástico o método de esfuerzos de trabajo.....	48
3.5.1.4.2 Resistencia última	54
3.5.2 Cortante o tensión diagonal	77
3.5.3 Torsión	80
3.5.3.1 Introducción	81
3.5.3.2 Ejemplo de aplicación.....	83
3.5.3.1.1 Materiales.....	83

3.5.3.1.2 Evaluación de cargas	83
3.5.3.1.3 Diseño a flexión	86
3.5.3.1.4 Diseño a Cortante	87
3.5.3.1.4 Diseño a torsión.....	87
3.6 COLUMNAS.....	90
.5.1 Definición y clasificación	90
3.7 MUROS	96
3.7.1 Contención	97
3.7.1.1 Muros para soportan solamente taludes de tierras.....	98
3.7.1.2 Estribos	112
3.7.1.3 Pantalla o cortina.....	115
3.6.2 Muros cortina o de cortante	117
3.7.2.1 Definición	117
3.7.2.2 Clasificación de los muros cortina	118
3.7.2.3 Aspectos principales para su análisis y diseño estructural	122
3.7.2.3.1 Carga axial y flexión	123
3.7.2.3.2 Cortante	125
3.7.2.3.3 Requisitos mínimos.....	127
3.8 ESCALERAS	128
3.8.1 Diseño escalera de una sola línea.....	129
1. 3.9 ESPECIFICACIONES MÍNIMAS DE ELEMENTOS DE CONCRETO	134
Entrepisos	134
Losas macizas en una dirección	134
Vigas maestras, vigas y viguetas en una dirección.....	135
4. REFERENCIAS	138

TÉRMINOS Y DEFINICIONES DE VARIABLES

“a”	Distancia del bloque de Wintney ($a=B1(c)$) expresada en m.
Aa	Aceleración pico probable (% g)
As	Área del acero en la zona a tracción expresada en cm^2 o mm^2
As ^l	Área del acero en la zona a compresión expresada en cm^2 o mm^2
Av	Área de las ramas de acero de flejes o estribos expresada cm^2 o mm^2
bv	Ancho de viga principal (m)
B1	Factor en función de la resistencia del concreto (f_c). $B1=0.85 f_c \leq 28$ Mpa. Decece 0.05 cada 7 Mpa, sin ser menor de 0.65.
b1	Ancho del alma de una viga “T” o “L”
“b”	Ancho total de la viga rectangular. Para vigas “T” o “L” es el ancho total de la aleta.
Be	Ancho efectivo de vigas con sección “T” o “L”
“c”	Localización del eje neutro estructural
c _b	Localización del eje neutro cuando falla simultáneamente el acero y el concreto. Dicha distancia esta relacionada con la cuantía balanceada.
“d”	Altura efectiva medida desde la fibra extrema a compresión al centro de gravedad del acero de refuerzo (As).
d’	Distancia relacionada con el recubrimiento del concreto (m). Para vigas rectangulares es la altura total menos “d”.
Ec	Módulo de elasticidad del concreto expresado en MPa
Es	Módulo de elasticidad del acero expresado en MPa
“fc”	Resistencia del concreto expresado en Mpa
fr	Módulo de rotura expresado en Mpa
Fy	Límite de fluencia del acero
he	Altura total del entrepiso (m)
H	Altura total de una viga rectangular
Ig	Inercia bruta de una sección transversal expresada en mm^4 o m^4
Mu	Momento último actuante expresado en kN.m
Mcr	Momento de agrietamiento expresado en kN.m
“t”	Espesor de la aleta de una viga de sección “T” o “L”
W _{cm}	Carga muerta por metro cuadrado del entrepiso expresada en KN/m^2
W _{cv}	Carga viva por metro cuadrado del entrepiso expresada en KN/m^2
W _f	Carga por metro lineal de la fachada (KN.m)
W _e	Carga por metro lineal de la escalera (KN.m)
Sa	Aceleración tomada del espectro de respuesta
Sv	Separación entre bordes de viguetas expresados en m.
S	Separación de flejes o estribos expresados en cm o m.
Ta	Periodo aproximado de vibración natural del edificio (seg)
Vn	Cortante nominal resistente expresado en KN

V_c	Cortante resistente suministrado por el concreto en términos de fuerzas expresado en KN
V_{ce}	Cortante resistente suministrado por el concreto en términos de esfuerzos expresado en Mpa
V_s	Cortante resistente suministrado por el acero en términos de fuerzas expresado en KN
V_{se}	Cortante resistente suministrado por el acero en términos de esfuerzos expresado en Mpa
T_s	Espesor de losa superior
T_i	Espesor de losa inferior
Y_b	Distancia desde el eje neutro o centro de gravedad de la sección transversal de un elemento a la fibra extrema inferior
Y_t	Distancia desde el eje neutro o centro de gravedad de la sección transversal de un elemento a la fibra extrema superior
ϵ_{cu}	Deformación unitaria última del concreto (considerando 0.003)
ϵ_t	Deformación unitaria del acero
ϵ_y	Deformación unitaria de fluencia del acero, que se define como la división de f_y sobre E_s
λ	Facto que afecta la resistencia a cortante del concreto. Depende del tipo de concreto si es liviano o normal.
ϕ	Factor de reducción de resistencia que es diferentes para flexión, cortante y carga axial
ρ	Cuantía del acero en la zona a tracción (A_s/bd)
ρ^l	Cuantía del acero en la zona a compresión (A_s^l/bd)
ρ_b	Cuantía balanceada de acero, que se da cuando el acero falla simultáneamente cuando falla el concreto.
ρ_{max}	Cuantía máxima del acero($0.75\rho_b$)
ρ_{min}	Cuantía mínima del acero

1. INTRODUCCIÓN

2. CONCEPTOS DE ANÁLISIS Y DINÁMICA ESTRUCTURAL

3. CONCEPTOS DE CONCRETO REFORZADO

En este capítulo se presentan los fundamentos esenciales de la ingeniería estructural, los cuales son necesarios para el desarrollo y la resolución de ejemplos reales relacionados con el análisis y diseño de estructuras en concreto reforzado.

3.1 TECNOLOGÍA DEL CONCRETO

3.1.2 Fundamentos básicos

Los fundamentos del área de la tecnología del concreto son indispensables para el diseño y la construcción de cualquier edificación o estructura. En este documento se presentan algunos de los conceptos principales de este tema, el cual se encuentra con profundidad en diferentes referencias de carácter nacional e internacional, tales como: (Guzmán, 1996), (García Reyes, 2014), (Rochel, 1998), (McCormac & Russell, 2009), (Nawy, 1998), entre otros.

El concreto u hormigón es un material heterogéneo, de tipo pétreo constituido por la mezcla de cemento, agregados grueso, agregados finos (arena) y agua. La mezcla de cemento con agua se denomina “**Pasta**”, que actúan químicamente y se constituyen en el ligante con los agregados para formar una sola masa. Mediante el ajuste y la adecuada combinación de los componentes constitutivos de la mezcla se pueden obtener diferentes resistencias, de acuerdo con la necesidad de cada obra. La resistencia del concreto depende de las proporciones de los componentes, del procedimiento de mezclado y del control de la temperatura desde el momento en que se coloca en las formaletas hasta el endurecimiento. El control de la temperatura se denomina “**Curado**”, con el cual se facilita una adecuada hidratación del cemento y en consecuencia se obtienen mezclas más resistentes.

El **cemento** es la sustancia que tiene propiedades ligantes. El cemento Pórtland es un cemento hidráulico, proveniente de materiales calcáreos seleccionados, pulverizados y mezclados. Esta mezcla se calcina a 1350 C y produce clinker, el cual se muele y se le adiciona yeso para regular el fraguado. En Colombia hay cinco (5) clase de cemento y se emplean especialmente los tipos 1 y 3.

El **agua** permite que el cemento pueda fraguar y la manejabilidad de la mezcla. Es muy importante la proporción de agua para que la mezcla cumpla con las necesidades y no se presenten problemas de hormigones porosos, de baja resistencia, poco fluidas, etc.

Los agregados finos o arena tienen partículas entre 0.075 y 5 mm. El **agregado grueso** o cascajo tiene partículas mayores a 5 mm. Para el diseño de la mezcla, se deben conocer las siguientes propiedades del agregado: granulometría, densidad, absorción, masa unitaria seca, contenido de materia orgánica, contenido de arcilla, forma de las partículas, etc.

La variable relevante que afecta la resistencia del concreto es la relación **agua / cemento**. A mayor la relación **agua / cemento** menor es la resistencia a compresión y tracción. Los **aditivos** son productos químicos que se adicionan al concreto antes o durante el vaciado para modificar sus propiedades. En algunas obras es necesario que la resistencia adquiera su resistencia en poco tiempo. Los aditivos pueden ser plastificantes, acelerantes, retardantes, o productos que producen expansión y repelentes de agua.

.0

3.1.3 Diagrama esfuerzo - deformación

Según la (García, 2008a) , diferentes ensayos han indicado que la forma de la curva esfuerzo-deformación antes del esfuerzo máximo depende básicamente de la resistencia del concreto(f_c). Se ha manifestado un comportamiento no lineal aún a niveles bajos de esfuerzo. Desde hace bastante tiempo se ha generalizado el uso de una parábola de segundo orden para describir la relación esfuerzo-deformación en este rango.

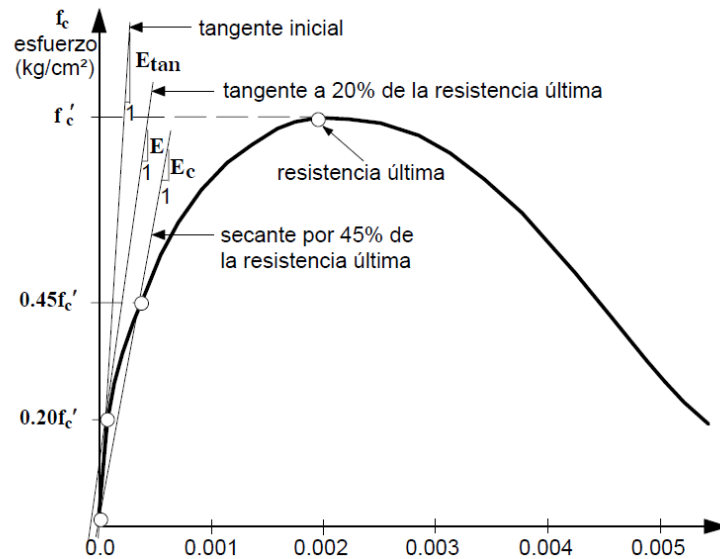


Figura 3 - 1. Curva esfuerzo deformación del concreto. Fuente: Tomado de referencia (García Reyes, 2014)

Una de las relaciones o funciones de segundo orden del diagrama esfuerzo deformación del concreto fue la desarrollada por (Hognested, 1956) que se presenta a continuación:

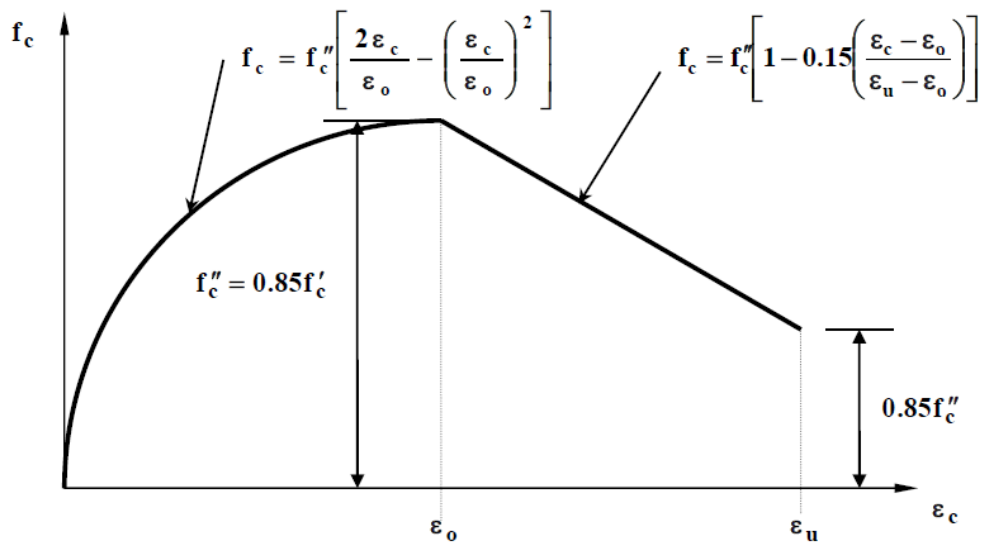


Figura 3 - 2. Funciones de la curva esfuerzo deformación del concreto determinada por (Hognested, 1956). Fuente: Tomado de la referencia(García Reyes, 2014)

El trabajo de la referencia por (Hognested, 1956), que abarca el estudio del concreto no confinado, sirvió como base a Whitney para proponer su bloque equivalente de esfuerzos, adoptado después por el ACI, que es base del método de diseño a flexión de resistencia última que se presenta en el numeral 3.4.1.4.2 y la Figura 3 - 24 de este documento. Igualmente sirvió para definir la deformación unitaria máxima útil del concreto que es de 0.003.

Otra es la curva esfuerzo deformación determinada por la referencia (Kent & Park, 1971), que es una de las más usada actualmente para concreto confinado en elementos sometidos a flexión, ya que se basó en el estudio o la prueba de especímenes confinados por estribos rectangulares.

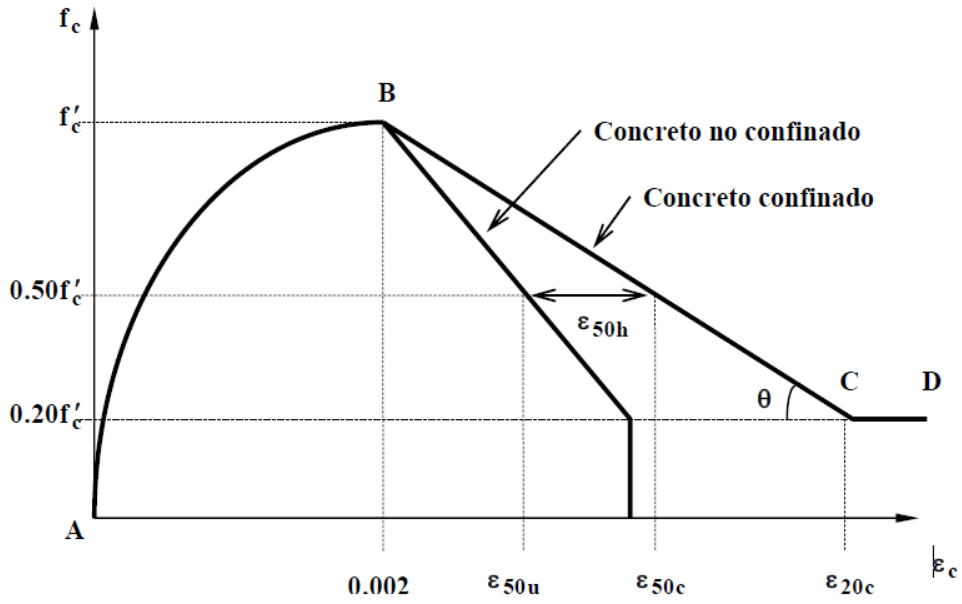


Figura 3 - 3. Funciones de la curva esfuerzo deformación del concreto determinada por (Kent & Park, 1971) Fuente: Tomado de la referencia (García Reyes, 2014)

Las funciones de la curva tienen tres regiones:

Región	Función		Condición											
A-B	$c = f'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{0.002} - \left(\frac{\varepsilon_c}{0.002} \right)^2 \right]$	(3 - 1)	$\varepsilon_c \leq 0.002$											
B-C	$f_c = f'_c [1 - Z(\varepsilon_c - 0.002)]$	(3 - 2)	$0.002 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20c}$ f'_c : Resistencia a la compresión de la concreta medida en cilindros de 15x30 cm ρ_s : Cuantía volumétrica de refuerzo transversal. Relación del volumen de refuerzo transversal al volumen de concreto confinado por este refuerzo transversal. b'' : Ancho del núcleo confinado medido fuera - fuera de los estribos. s_h : Espaciamiento centro - centro de los estribos											
	$\varepsilon_{50u} = \frac{\eta + 0.002 f'_c}{f'_c - \beta}$	(3 - 3)												
	$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} + \varepsilon_{50h} - 0.002}$	(3 - 4)												
	$\varepsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b''}{s_h}}$	(3 - 5)												
	$\varepsilon_{20c} = \frac{0.8}{Z} + 0.002$	(3 - 6)												
	Los valores de η y β toman los siguientes valores: <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>Mpa</td> <td>Kg/cm2</td> <td>Psi</td> </tr> <tr> <td>η</td> <td>0.021</td> <td>0.21</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>β</td> <td>7</td> <td>70</td> <td>100</td> </tr> </table>			Mpa	Kg/cm2	Psi	η	0.021	0.21	3	β	7	70	100
	Mpa	Kg/cm2	Psi											
η	0.021	0.21	3											
β	7	70	100											
C-D	$f_c = 0.2 f'_c$	(3 - 7)	$\varepsilon_c > 0.002$											

Tabla 3 - 1 Funciones del diagrama esfuerzo - deformación del concreto no confinado y confinado según (Kent & Park, 1971)

Por otro lado, la resistencia del concreto incrementa con la edad, debido al proceso de hidratación. En la práctica la resistencia se determina experimentalmente a los 3, 7, 14 y 28 días. Existen diversas investigaciones realizadas por diferentes universidades de Colombia, que han determinado ecuaciones empíricas que relacionan las resistencias en diferentes edades, la cual dependen específicamente del tipo de cemento empleado. Tiene la siguiente expresión:

$$f'_{(28)} = C + Kf'_{(7)} \quad (3 - 8)$$

Se presentan algunas de las relaciones aproximadas para Colombia, que relacionan la resistencia del concreto a diferentes edades en kgf/cm²:

$$f'_{(28)} = f'_{(3)} + 17f'_{(3)} \quad (3 - 9)$$

$$f'_{(1año)} = 1.35f'_{(28)} \quad (3 - 10)$$

$$f'_{(90)} = 1.20f'_{(28)} \quad (3 - 11)$$

$$f'_{(28)} = 1.16f'_{(14)} \quad (3 - 12)$$

$$f'_{(28)} = 41.13 + 1.0026 * f'_{(14)} \quad (3 - 13)$$

La resistencia a la compresión del concreto (f_c), se determina mediante ensayos a los 28 días de probetas cilíndricas de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura (de acuerdo con las normas ((ASTM-C39/C39M-18., 2018)). Mediante este ensayo se realiza la curva esfuerzo-deformación, con la cual se obtiene la resistencia a la compresión, el módulo de elasticidad y la deformación última. De acuerdo con el (ACI-318-25, 2025) la máxima deformación unitaria última es de 0.003. La curva esfuerzo-deformación no es obligatoria para diseño.

La manejabilidad del concreto es usualmente juzgada por un examen visual, debido a que hasta el momento no se conoce ningún ensayo que mida la propiedad de manera directa. Sin embargo, se han desarrollado una serie de ensayos con los cuales se puede determinar las propiedades del concreto en estado plástico en términos de consistencia, fluidez, cohesión y grado de compactación, uno de ellos es el ensayo de asentamiento (ASTM-C39/C39M-18., 2018).

3.1.2 Módulo de elasticidad

El **módulo de elasticidad** mide la rigidez o la resistencia del material al sufrir deformaciones. El concreto es un material elasto - plástico, ya que las tensiones no son proporcionales a las deformaciones. El módulo de elasticidad depende de:

- Resistencia a la compresión
- Edad del concreto
- Propiedades de los agregados
- Propiedades del cemento
- Velocidad de carga del ensayo
- De la forma y tamaño de las probetas.

El módulo de elasticidad del concreto normal, que es la pendiente de la porción recta de la línea trazada desde el origen de la curva esfuerzo-deformación, hasta un valor correspondiente a $0.45f_c$ (Ver (C469-14, 2014)). Este es llamado módulo de elasticidad secante. El Módulo de elasticidad aproximado estipulado por (ACI-318-25, 2025), se presenta a continuación:

$$E_c = 4700\sqrt{f_c} \quad (3 - 14)$$

Siendo f_c en MPa.

Según (ACI-318-25, 2025), para concreto liviano o densidades diferentes, el ACI utiliza una expresión más general:

$$E_c = 0.043 * w^{1.5} \sqrt{f_c} \quad (3 - 15)$$

Siendo: W es el peso unitario del concreto en kg/m³.

Las características del ACI son:

- Proporciona una ecuación general basada en la densidad del concreto.
- Permite calcular E_c para concretos livianos, semilivianos o pesados.
- El valor DE $4700\sqrt{f_c}$ es solo una simplificación para concreto normal.

3.1.3 Relación poissons

Es una constante obtenida de la división entre la deformación unitaria transversal y la longitudinal, la cual se obtiene de un ensayo de compresión simple. Es un coeficiente importante, empleado en los modelos en elementos finitos para el análisis y diseño de losas, túneles, presas y arcos. Esta relación varía entre 0.15 y 0.20.

3.1.4 Módulo de rotura

El concreto resiste esfuerzos de tensión bajos, los cuales son importantes de evaluar, para estudiar los problemas de fisuras y su comportamiento en estado de servicio. Su valor oscila entre el **10 y el 15%** de la resistencia a la compresión (f_c), como se presentan en la siguiente ecuación de acuerdo con (ACI-318-25, 2025)(INVIAS/AIS/NSR-10, 2010):

$$f_r = 0.62 \sqrt{f_c} \quad (3 - 16)$$

El módulo de rotura representa la resistencia del concreto a tracción en flexión, utilizada principalmente en:

- diseño de losas y pavimentos
- cálculo de agrietamiento
- verificación de estado límite de servicio

La pequeña diferencia entre normas se debe a ajustes estadísticos en bases de datos experimentales del ACI.

Experimentalmente, el módulo de rotura roma directo de la anterior ecuación, sino que se mide con un ensayo de flexión sobre una viga de concreto. El método clásico y más usado es

el de carga en los tercios, regulado por (ASTM C78/C78M-22., 2022). Se fabrica o se extrae una viga prismática de concreto, se apoya simplemente en dos apoyos y se le aplica carga hasta la falla. En (ASTM C78/C78M-22., 2022). la carga se aplica en **dos puntos**, es decir, en los **tercios del vano**. El resultado de ese ensayo se reporta como **módulo de rotura**. Se necesitan básicamente estos datos:

Parámetro	Significado	Unidades SI más usadas
P	Carga máxima aplicada en el ensayo	N o kN
B	Ancho promedio de la viga de concreto	mm o m
D	Altura efectiva o profundidad de la viga	mm o m
L	Luz entre apoyos de la viga	mm o m
f _r	Módulo de rotura (resistencia a flexión del concreto)	MPa (N/mm ²)

Tabla 3 - 2 Parámetros con las unidades para calcular el módulo de rotura

Y la ecuación es:

$$f_r = \frac{PL}{b * d^2} \quad (3 - 17)$$

Si la línea de fractura queda fuera del tercio medio, ASTM C78 usa una forma ajustada basada en la distancia entre la fractura y el apoyo más cercano. O sea, no siempre se usa la fórmula simple anterior; depende de dónde rompió la viga

3.2 ACERO DE REFUERZO

3.2.1 Definición y clasificación

Para el concreto reforzado se emplean generalmente varillas o barras circulares, lisas o corrugadas. Son corrugadas para mejorar la adherencia entre el acero y el concreto. La NSR-10 permite solamente barras lisas para estribos, espirales y refuerzo de repartición. Generalmente se encuentran de un diámetro de ¼” a 1 ¼” y se denominan por el número de octavos. A continuación, se presenta una tabla con el diámetro, el área y el peso por metro de cada una de las barras de acero de refuerzo empleadas en el mercado nacional de acuerdo con (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010).

Designación de la barra	Diámetro de referencia en pulgadas	Diámetro (mm)	Area (mm ²)	Peso (kgf/m)
No.2	"1/4	6,4	32	0,250
No.3	"3/8	9,5	71	0,560
No.4	"1/2	12,7	129	0,994
No.5	"5/8	15,9	199	1,552
No.6	"3/4	19,1	284	2,235
No.7	"7/8	22,2	387	3,042
No.8	"1	25,4	510	3,973
No.9	"1-1/8	28,7	645	5,060
No.10	"1-1/4	32,3	819	6,404
No.11	"1-3/8	35,8	1006	7,907
No.14	"1-3/4	43	1452	11,380
No.18	"2-1/4	57,3	2581	20,240

Tabla 3 - 3 Dimensiones y características de las barras de acero comerciales empleadas en el mercado. Fuente: (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010)



Figura 3 - 4. Acero de refuerzo. Fuente: (Diaco, 2015)

También se encuentran en el mercado las mallas electrosoldadas, que están dispuestas en forma de cuadrícula y se emplean como refuerzo de: losas de menor espesor, muros divisorios de carga, pavimentos, túneles, canales, etc.

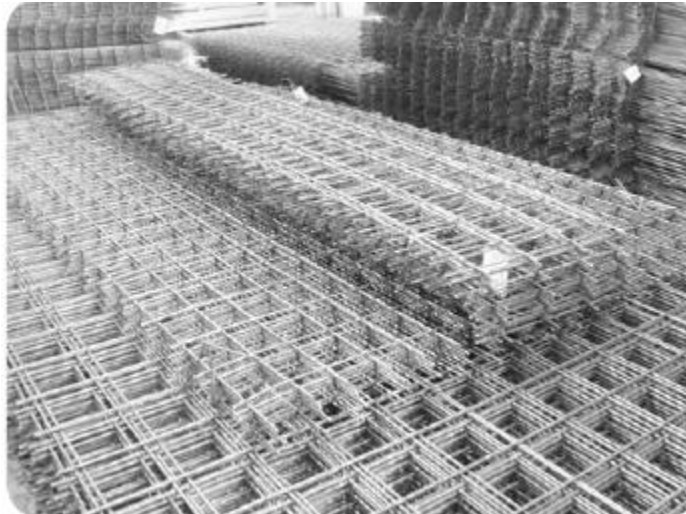


Figura 3 - 5. Mallas electrosoldadas. Fuente: (Diacó, 2015)

3.2.2 Módulo de elasticidad y límite de fluencia

Mediante ensayos a tracción de probetas estándar se determinan las curvas esfuerzo deformación, con las cuales se haya el módulo de elasticidad (E_s) y el límite de fluencia (f^Y). El punto de la curva esfuerzo-deformación donde se termina la proporcionalidad, se llama límite de fluencia. Su determinación se realiza mediante una curva paralela que parte de una deformación unitaria de 0.002. El módulo de elasticidad se determina mediante la pendiente de la zona elástica. La (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) recomienda un módulo de elasticidad de 200.000 MPa.

3.3 ADHERENCIA ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO

Se presenta a continuación un cuadro comparativo entre la NSR-10 y el ACI-318-25 relacionados con el tema de adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo:

Aspecto	ACI 318-25	NSR-10
Base normativa	Norma estadounidense más reciente para concreto estructural.	Reglamento colombiano basado en versiones anteriores del ACI (principalmente ACI 318-08/11).
Concepto de adherencia	Se basa en la teoría de desarrollo de barras y adherencia acero-concreto con factores de modificación más detallados.	Usa el mismo concepto general de longitud de desarrollo, pero con formulaciones derivadas de versiones antiguas del ACI.
Longitud de desarrollo	Incluye factores actualizados para recubrimiento, espaciamiento, confinamiento y posición de la barra.	Usa expresiones similares, pero con menor refinamiento en los factores de ajuste.
Traslapos de barras a tracción	Define empalmes Clase A y Clase B con criterios más detallados sobre condiciones estructurales.	Mantiene la misma clasificación básica de empalmes Clase A y B basada en longitud de desarrollo.
Longitud de traslapo a tracción	Clase A $\approx 1.0 l_d$; Clase B $\approx 1.3 l_d$ con controles adicionales.	Clase A = l_d ; Clase B = $1.3 l_d$.
Traslapos de barras a compresión	Basados en una fracción de la longitud de desarrollo con requisitos adicionales para barras grandes.	También usa una fracción aproximada de l_d con mínimos de longitud establecidos.
Tratamiento de barras superiores (top bars)	Considera factores específicos para barras colocadas en la parte superior.	Incluye el concepto, pero con menor nivel de detalle.
Influencia del confinamiento	Mayor énfasis en el efecto del refuerzo transversal y el confinamiento en la adherencia.	Considera confinamiento, pero con formulaciones más simplificadas.
Nivel de actualización	Incluye avances experimentales recientes y reorganización de capítulos.	Mantiene formulación tradicional basada en investigaciones previas.
Impacto en diseño práctico	Resultados de diseño ligeramente más refinados.	Resultados muy similares en la mayoría de aplicaciones estructurales.

Tabla 3 - 4 Comparación en el tema de Adherencia entre NSR-10 y ACI-318-25. Fuente: Desarrollado con apoyo de IA

Basados en lo anterior presentamos a continuación los conceptos especialmente con el ACI-318-25.

3.3.1 Generalidades

Los fundamentos de concreto reforzado, se basan en asegurar adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo, la cual depende de la fricción mecánica y química. Contribuye a la adherencia, de una manera apreciable, los resaltes de las varillas corrugadas, por lo cual el ACI-318-25 y la (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) no recomiendan en la actualidad el uso de varillas lisas para aceros de refuerzo principales.

Basados en investigaciones analíticas y experimentales, el ACI estableció las longitudes de desarrollo o de anclaje, para los diferentes aspectos que se presentan en los despieces del hormigón armado, tales como: traslapos, ganchos, anclajes en nudos, anclajes en zapatas, entre otros. Esta dimensión corresponde a la longitud mínima que debe embeberse una barra dentro del concreto para que al someterla a una carga axial de extracción falle por fluencia antes que por desgarre del concreto.

Las variables que influyen en el cálculo de la longitud de desarrollo son: resistencia a compresión del concreto y a tracción del acero de refuerzo. También el diámetro del refuerzo, recubrimiento del concreto, la separación de las barras longitudinales, la posición del refuerzo, etc.

3.3.2 Traslapos de barras a tracción

Las dimensiones de los elementos de concreto reforzados empleados para estructuras implican que es necesario realizar empalmes de sus barras de refuerzo. Esto se hace uniendo las barras mediante una longitud de traslapo que debe ser como mínimo de una distancia de 300 mm.

Estas longitudes de traslapo de barras corrugadas a tracción son función de las longitudes de desarrollo y el código las clasifica en dos (2) grupos que dependen del porcentaje de acero empalmado.

As colocado / As requerido	% As traslapado	
	50	100
≥ 2	Clase A	Clase B
< 2	Clase B	Clase B

Tabla 3 - 5. Especificaciones para empalmes de refuerzo a tracción (tomado de la tabla CR12.15.2 de (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010))

La longitud de empalme para cada tipo es:

- Clase A1.0* L_{db}
- Clase B..... 1.3* L_{db}

Donde L_{db} es la longitud de desarrollo. Para barras corrugadas o alambres a tracción menores o iguales a varillas No. 6 es:

$$L_{db} = \frac{fy\psi_t\psi_e}{2.1\lambda\sqrt{fc}} db \geq 30cm \quad (3 - 18)$$

Para barras mayores o iguales a varillas No. 7 se tiene:

$$L_{db} = \frac{fy\psi_t\psi_e}{1.7\lambda\sqrt{fc}} db \geq 30cm \quad (3 - 19)$$

Donde f_c y f_y son las resistencias del concreto y acero respectivamente en Mpa, y db corresponde al diámetro de la barra en mm. En la Tabla 3 - 6 se presentan las longitudes de desarrollo para diferentes barras y resistencia del concreto, donde se consideró concreto de peso normal y sin recubrimiento epóxico.

$$\psi_t = 1.0, \psi_e = 1.0, \lambda = 1.0$$

Barras	Db (mm)	Fy(Mpa)	fc(Mpa)		
			21	28	35
3/8	9.53	420	416	360	322
1/2	12.7	420	554	480	429
5/8	15.88	420	693	600	537
3/4	19.05	420	831	720	644
7/8	22.23	420	1198	1038	928
8/8	25.4	420	1369	1186	1061
9/8	28.58	420	1541	1334	1193

Tabla 3 - 6. Longitud de desarrollo (L_d) de barras corrugadas a tracción (Medida en mm)

Ejemplo: Traslapos de barras a tracción

Enunciado: Determinar la longitud de traslapo a tracción del refuerzo de una viga de concreto reforzado. El refuerzo principal está compuesto por tres (3) varillas No. 8, las cuales se empalman con tres (3) varillas No. 4. El diseño arrojó un área teórica requerida de 14 cm². El concreto es de 35MPa y el acero de 420 MPa.

Solución: Primero se determina la relación del As colocada/As requerido:

$$f_c := 35 \cdot \text{MPa} \quad f_y := 420 \cdot \text{MPa}$$

$$A_{\text{requerido}} := 14 \text{ cm}^2 \quad A_{\text{colocado}} := 5.1 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 15.3 \text{ cm}^2$$

$$\text{relacion} := \frac{A_{\text{requerido}}}{A_{\text{colocado}}} = 0.915$$

Como la relación antes calculada, es menor a 2 y el porcentaje de traslapo es del 50%, el empalme deber tipo clase B. Por ello, la longitud de desarrollo es de 1061 mm y el traslapo de 1.37 m.

3.3.3 Traslapos de barras a compresión

Para barras que deban empalmarse y estén sometidas a compresión, la NSR-10 establece que se debe seleccionar el mayor valor entre:

$$L_{db} = \frac{0.24 f_y}{\lambda \sqrt{f_c}} db \quad (3 - 20)$$

$$L_{db} = 0.04 f_y db \quad (3 - 21)$$

En la Tabla 3 - 7 se presentan las longitudes de desarrollo para diferentes barras y resistencia del concreto, donde se consideró concreto de peso normal:

Barras	Db (mm)	Fy(Mpa)	fc(Mpa)		
			21	28	35
3/8	9.53	420	210	181	162
1/2	12.7	420	279	242	216
5/8	15.88	420	349	302	270
3/4	19.05	420	419	363	325
7/8	22.23	420	489	423	379
8/8	25.4	420	559	484	433
9/8	28.58	420	629	544	487

Tabla 3 - 7. Longitud de desarrollo (Ld) de barras corrugadas a compresión tracción (Medida en mm)

3.3.4 Ganchos de 90,135 y 180 grados

En los extremos de las barras se pueden emplear ganchos de 90,135 y 180 grados, cuando estas varillas se van a anclar al final de un elemento, como se observa en la siguiente figura:

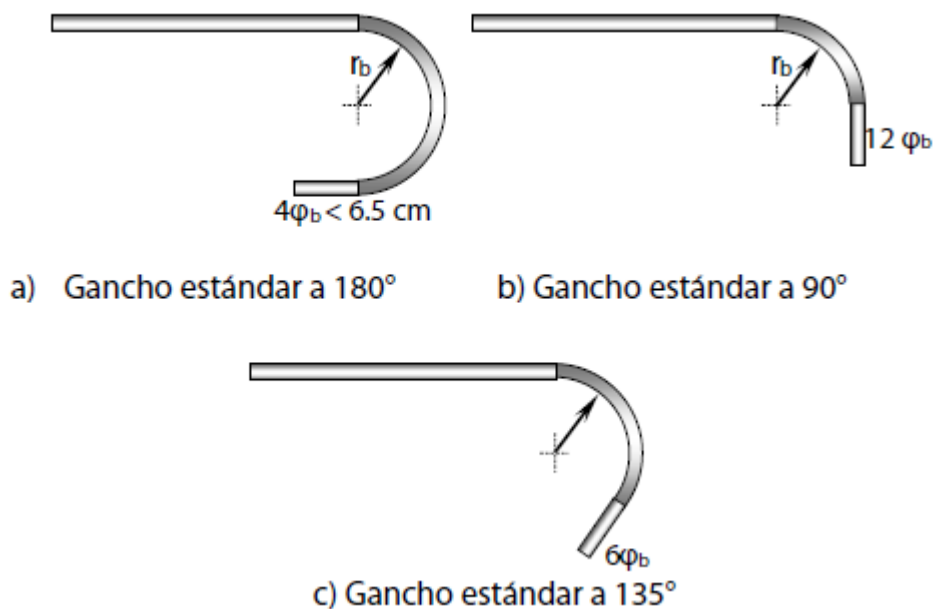


Figura 3 - 6. Ganchos de acero de refuerzo. Fuente: (Diacio, 2015)

Para los ganchos de 90°, su longitud se estima aproximadamente como cinco veces el número de la barra. Es decir, para una varilla No. 4, la longitud del gancho será de 20 cm (4×5). Para los ganchos de 180° se calcula la mitad de la circunferencia o el perímetro más una distancia que depende del número de la barra. A continuación, se presenta una tabla con la longitud de los ganchos y 180° para las diferentes barras:

Barra	Diámetro nominal	db (in)	db (cm)	D: diámetro de doblado (in)	D (cm)	Longitud (cm)
No. 4	1/2"	0.5	1.27	3.00	7.62	15.24
No. 5	5/8"	0.625	1.59	3.75	9.53	17.78
No. 6	3/4"	0.75	1.91	4.50	11.43	20.32
No. 7	7/8"	0.875	2.22	5.25	13.34	25.40
No. 8	1"	1	2.54	6.00	15.24	27.94

Tabla 3 - 8. Longitud de ganchos de 180 grados

3.3.5 Longitudes de desarrollo de barras a tracción con gancho a 90 grados

Especialmente para las vigas sismo resistente, la (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) establece unas especificaciones para asegurar las condiciones de anclaje del refuerzo longitudinal en sus extremos al unirse con las columnas. Para vigas principales que hagan parte de estructuras DMI y DMO se debe cumplir con una longitud de desarrollo igual a:

$$L_{dh} = \frac{f_y}{4.2\sqrt{f_c}} db \geq 8db \geq 150mm \quad (3 - 22)$$

Expresando:

- f_y y f_c en MPa
- db y L_{dh} en mm

3.4 DURABILIDAD

La durabilidad del concreto reforzado es un aspecto fundamental en el diseño y construcción de estructuras, ya que determina la capacidad de la estructura para mantener su desempeño y seguridad a lo largo del tiempo frente a las condiciones ambientales y de servicio. En las estructuras de concreto reforzado, la durabilidad está estrechamente relacionada con la protección del acero de refuerzo frente a procesos de corrosión, los cuales pueden generarse por la penetración de agentes agresivos como el dióxido de carbono, cloruros, humedad o sulfatos. En este contexto, el recubrimiento de concreto cumple una función esencial, ya que

actúa como una barrera física que protege el acero de refuerzo del contacto directo con el ambiente y contribuye a preservar la alcalinidad del concreto que mantiene pasivado el acero.

No obstante, la durabilidad del concreto reforzado no depende únicamente del recubrimiento, sino también de otros factores como la calidad del concreto, la relación agua-cemento, la adecuada compactación y curado, la permeabilidad del material y las condiciones de exposición de la estructura. Un concreto de baja permeabilidad y correctamente colocado dificulta la entrada de agentes agresivos y prolonga la vida útil de la estructura. Por esta razón, las normas de diseño establecen requisitos mínimos de recubrimiento, resistencia del concreto y control de materiales, con el objetivo de garantizar que las estructuras de concreto reforzado puedan cumplir su función estructural durante el periodo de servicio previsto con un adecuado nivel de seguridad y mantenimiento reducido.

3.4.1 Recubrimiento mínimo

En la **ACI 318-25**, el recubrimiento mínimo del acero se establece principalmente en función de tres aspectos fundamentales: el tipo de elemento estructural (vigas, losas, columnas, muros, etc.), el diámetro del refuerzo y las condiciones de exposición ambiental. La norma clasifica los ambientes en categorías de exposición (por ejemplo, exposición a cloruros, congelación-deshielo o ambientes agresivos) y ajusta los requisitos de recubrimiento y calidad del concreto para garantizar la durabilidad. Además, el ACI integra el concepto de durabilidad con otros parámetros como relación agua-cemento, resistencia mínima del concreto y control de permeabilidad, lo que permite un enfoque más completo del desempeño a largo plazo del concreto reforzado. Según ACI-318-25, los recubrimientos mínimos son:

Elemento / Condición	Recubrimiento mínimo (mm)
Concreto colado directamente contra el suelo	75 mm
Concreto expuesto al suelo o intemperie – barras #6 a #18	50 mm
Concreto expuesto al suelo o intemperie – barras #5 o menores	40 mm
Vigas y columnas (no expuestas al suelo o clima)	40 mm
Losas, muros y viguetas – barras #11 o menores	20 mm
Losas y muros – barras #14 y #18	40 mm

Tabla 3 - 9. Recubrimientos mínimos. Fuente:

El recubrimiento mínimo de concreto en vigas, losas y columnas, el cual protege el acero de refuerzo contra la corrosión y garantiza su adecuada adherencia con el concreto, se establece según los siguientes valores

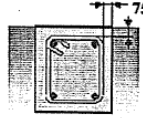
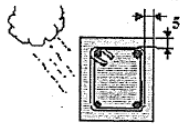
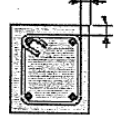


Miembros contruidos contra la tierra y en contacto permanente con ella	 Recubrimiento mínimo de concreto 75 mm
Miembros expuestos a la intemperie o a la tierra	 Recubrimiento mínimo de concreto 50 mm
Vigas maestras, vigas o columnas no expuestas a la intemperie ni en contacto con la tierra.	 Recubrimiento mínimo de concreto 40 mm
Losas macizas, viguetas o muros de concreto reforzado, no expuestos a la intemperie ni en contacto con la tierra	 Recubrimiento mínimo de concreto 20 mm
Losas macizas sobre el terreno	 Recubrimiento mínimo de concreto 40 mm

Tabla 3 - 10. Longitudes de ganchos de 90 y 180 grados. Fuente: (AIS/ACI/114/Colombia, 2017) y (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010)

3.5 FUNCIONAMIENTO

3.5.1 Introducción

El funcionamiento (serviceability) en el ACI 318-25 hace referencia a la capacidad de los elementos de concreto reforzado para desempeñarse adecuadamente bajo condiciones normales de uso, sin presentar deformaciones excesivas, fisuración inaceptable o vibraciones que afecten la seguridad, la durabilidad o el confort de los usuarios. A diferencia del diseño por resistencia, que busca evitar el colapso, los criterios de funcionamiento se enfocan en el comportamiento del elemento durante su vida útil en servicio.

En ACI 318-25, se mantiene el enfoque en el control de deflexiones, ancho de fisuras y vibraciones, incorporando lineamientos más claros para evaluar estos efectos en distintos tipos de elementos estructurales. El ACI 318-25 establece límites y recomendaciones que dependen del tipo de carga, las condiciones de apoyo y las características del material, promoviendo un diseño más preciso que garantice tanto el desempeño estructural como la apariencia y funcionalidad de la estructura.

En términos generales, el control del funcionamiento en el ACI 318-25 está estrechamente relacionado con la durabilidad del concreto reforzado, ya que una fisuración excesiva puede facilitar la penetración de agentes agresivos que deterioran el acero de refuerzo. Por ello, el código enfatiza la importancia de una adecuada selección de materiales, recubrimientos, cuantías de refuerzo y métodos de análisis, asegurando que las estructuras no solo sean seguras, sino también eficientes y sostenibles a lo largo del tiempo.

3.5.2 Control de deflexiones

El control de deflexiones en el ACI 318-25 es un aspecto fundamental dentro de los criterios de funcionamiento, ya que busca limitar las deformaciones en los elementos estructurales para evitar daños en acabados, elementos no estructurales y afectar el confort de los usuarios. Estas deflexiones pueden ser inmediatas o diferidas.

El código establece dos enfoques principales: el método indirecto basado en relaciones luz/peralte y el método directo mediante el cálculo explícito de deflexiones. La elección depende del nivel de precisión requerido y el criterio al respecto.

Además, se consideran efectos a largo plazo como la fluencia y retracción del concreto, los cuales incrementan las deflexiones con el tiempo bajo cargas sostenidas.

Tipo de elemento	Tipo de deflexión	Límite
Vigas y losas	Deflexión total	L/240
Vigas y losas	Carga viva	L/360
Elementos con acabados frágiles	Deflexión adicional	L/480
Voladizos	Deflexión total	L/180

Tabla 3 - 11. Límites típicos de deflexión Fuente: (AIS/ACI/114/Colombia, 2017) y (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010)

Con respecto a la relación luz/peralte se tiene varias opciones que depende del sistema estático de cada elemento; uno de ellos es cuando no tiene muros especiales que requieren mayor control de deformaciones:

Condición de apoyo	No susceptibles a daño	Susceptibles a daño
Simplemente apoyado	L/16	L/18.5
Un extremo continuo	L/18.5	L/21
Dos extremos continuos	L/21	L/24
Voladizo	L/8	L/10

Tabla 3 - 12. control de deflexiones en vigas/losa en una dirección Fuente: (ACI-318-25, 2025)

3.5.2.1 Ejemplo de aplicación 1

Se presenta la determinación de la deflexión de una viga simplemente apoyada de 7.5 metros de luz y su comparación con el límite correspondiente.

Materiales: Los materiales de la viga son los siguientes:

$$\begin{aligned}f_c &:= 28 \cdot \text{MPa} \\f_y &:= 420 \cdot \text{MPa} \\ \gamma_{\text{concreto}} &:= 24 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \\ \gamma_{\text{mortero}} &:= 22 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \\ E_c &:= 4700 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} = (2.487 \cdot 10^4) \text{ MPa} \\ E_s &:= 200000 \cdot \text{MPa} \\ n &:= \frac{E_s}{E_c} = 8.042\end{aligned}$$

Evaluación de cargas: Se presenta la carga muerta, la viva y última mayorada:

$$\begin{aligned}W_{cm} &:= 20 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} & W_{cv} &:= 5 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} & W_u &:= 1.2 \cdot W_{cm} + 1.6 \cdot W_{cv} = 32 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ & & & + & & \end{aligned}$$

Diseño a flexión: se hace el diseño a flexión, donde se determina una cuantía requerida que es mayor a la mínima y menor que la máxima, y por lo tanto el área de acero necesario para diferentes combinaciones de barras :

$$b := 0.35 \cdot m \quad d' := 0.09 \cdot m \quad \phi := 0.75 \quad L_{viga} := 7.5 \cdot m \quad h := 0.65 \cdot m$$

$$M_{max} := W_u \cdot \frac{L_{viga}^2}{8} = 225 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad d := h - d' = 0.56 \text{ m}$$

$$m := \frac{f_y}{0.85 \cdot f_c} = 17.647 \quad R_n := \frac{M_{max}}{b \cdot (d^2)} = 2.05 \text{ MPa}$$

$$\rho := \left(\frac{1}{m} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m \cdot R_n}{0.9 \cdot f_y}} \right) = 0.0057$$

$$\rho_{min} := 0.0033$$

$$\rho := \max(\rho, \rho_{min}) = 0.006$$

$$A_s := \rho \cdot b \cdot d = 11.193 \text{ cm}^2 \quad d_{fleje} := \frac{3}{8} \cdot 2.54 \cdot \text{cm} = 0.953 \text{ cm}$$

Prueba con barras No. 7

$$Asno7 := 3.87 \cdot cm^2$$

$$Nbarrasno7 := \frac{As}{Asno7} = 2.892 \quad 3 \cdot Asno7 = 11.61 \text{ cm}^2 \quad r := 4 \cdot cm$$

$$bmax := 2 \cdot r + 2 \cdot dfleje + 3 \cdot \frac{7}{8} \cdot 2.54 \text{ cm} + (3-1) \cdot 2.54 \cdot cm = 0.217 \text{ m}$$

$$\text{if}(bmax \leq b, \text{"Cumple"}, \text{"No cumple"}) = \text{"Cumple"}$$

Prueba con barras No. 8

$$Asno8 := 5.1 \cdot cm^2$$

$$Nbarrasno8 := \frac{As}{Asno8} = 2.195 \quad 3 \cdot Asno8 = 15.3 \text{ cm}^2$$

$$bmax := 2 \cdot r + 2 \cdot dfleje + 3 \cdot 2.54 \text{ cm} + (3-1) \cdot 2.54 \cdot cm = 0.226 \text{ m}$$

$$\text{if}(bmax \leq b, \text{"Cumple"}, \text{"No cumple"}) = \text{"Cumple"}$$

Prueba con barras No. 6

$$Asno6 := 2.84 \cdot cm^2$$

$$Nbarrasno6 := \frac{As}{Asno6} = 3.941 \quad 4 \cdot Asno6 = 11.36 \text{ cm}^2$$

$$bmax := 2 \cdot r + 2 \cdot dfleje + 4 \cdot \frac{6}{8} \cdot 2.54 \text{ cm} + (4-1) \cdot 2.54 \cdot cm = 0.251 \text{ m}$$

$$\text{if}(bmax \leq b, \text{"Cumple"}, \text{"No cumple"}) = \text{"Cumple"}$$

$$d'_{real} := r + dfleje + \frac{2.54 \cdot \frac{6}{8}}{2} \cdot cm = 0.059 \text{ m}$$

$$d := h - d'_{real} = 0.591 \text{ m}$$

Se determina la sección transversal transformado, utilizando la mejor opción basados en los resultados anteriores que es 4 varillas No. 6 en la parte inferior y 2 No. 4 en el extremo superior.

$$Asreal := 4 \cdot Asno6 = 11.36 \text{ cm}^2 \quad Asno4 := 1.29 \cdot \text{cm}^2$$

$$A'sreal := 2 \cdot Asno4 = 2.58 \text{ cm}^2$$

$$\frac{b \cdot x^2}{2} + (2 \cdot n - 1) \cdot A'sreal \cdot (x - 0.06 \cdot m) = n \cdot Asreal \cdot (d - x)$$

$$a1 := \frac{b}{2} = 0.175 \text{ m} \quad d = 0.591 \text{ m}$$

$$b1 := (2 \cdot n - 1) \cdot A'sreal + n \cdot Asreal = 0.013 \text{ m}^2$$

$$c1 := -(2 \cdot n - 1) \cdot A'sreal \cdot (0.06 \cdot m) - n \cdot Asreal \cdot (d) = -5.632 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$x := \frac{-b1 + \sqrt{b1^2 - 4 \cdot a1 \cdot c1}}{2 \cdot a1} = 0.146 \text{ m}$$

$$b = 0.35 \text{ m} \quad x = 0.146 \text{ m} \quad A'sreal = 2.58 \text{ cm}^2$$

$$Icr := \frac{b \cdot x^3}{3} + (2 \cdot n - 1) \cdot A'sreal \cdot (x - 0.06 \cdot m)^2 + n \cdot Asreal \cdot (d - x)^2 = 0.0022 \text{ m}^4$$

$$Icr := \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2 \cdot n - 1) \cdot A'sreal \cdot (x - 0.06 \cdot m)^2 + n \cdot Asreal \cdot (d - x)^2 = 0.0022 \text{ m}^4$$

Se determina la inercia neta:

$$Ig := \frac{b \cdot h^3}{12} = 0.00801 \text{ m}^4$$

Se halla el momento de agrietamiento:

$$fr := 0.7 \cdot \sqrt{\frac{fc}{MPa}} \cdot MPa = 3.704 \text{ MPa}$$

$$Mcr := \frac{fr \cdot Ig}{(d - x)} = 66.679 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se determina la inercia efectiva:

$$MA := \frac{W_{cm} \cdot L_{viga}^2}{8} + \frac{W_{cv} \cdot L_{viga}^2}{8} = 175.781 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$I_e := \left(\frac{M_{cr}}{MA}\right)^3 \cdot I_g + \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{MA}\right)^3\right) \cdot I_{cr} = 0.0025 \text{ m}^4$$

$$I_e := \min(I_g, I_e) = 0.003 \text{ m}^4$$

Se hallan las deformaciones de carga muerta y viva en el centro:

$$\delta_{cm} := \frac{5 \cdot (W_{cm}) \cdot L_{viga}^4}{384 \cdot E_c \cdot I_e} = 13.16 \text{ mm}$$

$$\delta_{cv} := \frac{5 \cdot (W_{cv}) \cdot L_{viga}^4}{384 \cdot E_c \cdot I_e} = 3.29 \text{ mm}$$

Se determina el factor para estimar las deflexiones a largo plazo:

$$\xi := 2$$

$$\rho' := \frac{A'_{sreal}}{b \cdot d} = 0.00124739$$

$$\lambda := \frac{\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = 1.883$$

$$\delta_{total} := \delta_{cm} \cdot \lambda + \delta_{cv} = 28.064 \text{ mm}$$

Los límites son los siguientes, donde se demuestra que la deflexión calcula es menor y cumple:

$$\frac{L_{viga}}{240} = 31.25 \text{ mm}$$

$$\frac{L_{viga}}{180} = 41.667 \text{ mm}$$

3.5 VIGAS Y/O VIGUETAS

Se expone a continuación algunos de los fundamentos básicos relacionados con el comportamiento estructural de vigas, viguetas o nervios, que incluyen el análisis y diseño a flexión y cortante basados en diferentes investigaciones y referencias consultadas ((Rochel, 1998), (McCormac & Russell, 2009), (Nawy, 1998), (Segura, 2006), entre otras).

3.5.1 Flexión

La flexión en un elemento se produce por la deformación causada por momentos provenientes de cargas externas aplicadas perpendiculares a su eje. Este tipo de comportamiento se presenta en diferentes tipos de elementos, uno de ellos son las vigas, las que se conciben estructuralmente para tener la capacidad de trabajar a flexión, pero también a cortante y torsión. El concepto de flexión se extiende también al análisis y diseño de elementos estructurales superficiales como placas o láminas. Se parte del concepto, que el esfuerzo que provoca la flexión se denomina momento flector.

Para el estudio del concepto de flexión en elementos de concreto reforzado, se hace a continuación una revisión de los principales criterios necesarios durante la etapa de análisis y diseño estructural.

3.5.1.1 Diagramas de cortante y momento

Este tema se aborda en el capítulo 2 de este libro. En la etapa de análisis estructural, es importante recordar la relación que existen entre las cargas externas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, que son fundamentos que los ingenieros deben tener claros para el proceso de diseño y que diferentes libros o documentos los tratan con profundidad (Ver (Gere, 2006), entre otros) .De esta forma, para el análisis estructural de una viga de concreto reforzado es necesario conocer o identificar:

- Los tipos y magnitudes de las cargas externas, que son las que actúan perpendiculares a su eje, como también la forma de su aplicación. Es decir, si son cargas por peso propio, carga muerta, carga viva o por una combinación, como también por otro tipo de carga, como: temperatura, etc.
- El “sistema estático”, es decir, de cuantas luces está conformada y que tipos de apoyos (primer grado, segundo grado, tercer grado, otro) tiene en sus extremos y en la zona intermedia. De esta parte se determina si es una viga estáticamente determinada o indeterminada.
- Las propiedades mecánicas, que dependen del tipo de materiales que lo componen. En estos casos son concreto y acero, por lo tanto, de cada uno es necesario: resistencia, módulo de elasticidad, etc.
- Las propiedades geométricas, que incluye: área, inercia, etc.
- El diagrama de cortante, momento y la elástica.

Basados en lo anterior, se hace a continuación el análisis estructural de una viga de una sola luz simplemente apoyada, es decir estáticamente determinada, compuesta por apoyos de segundo género (sistema estático), que tiene una carga externa que es uniformemente distribuida. Además, es una viga compuesta por un solo material, homogéneo, con un módulo de elasticidad “E” y una sección transversal con una inercia “I”. Dicha viga se muestra en la siguiente figura, donde se incluye: sistema estático, carga externa, diagrama de cortante, momento y elástica.

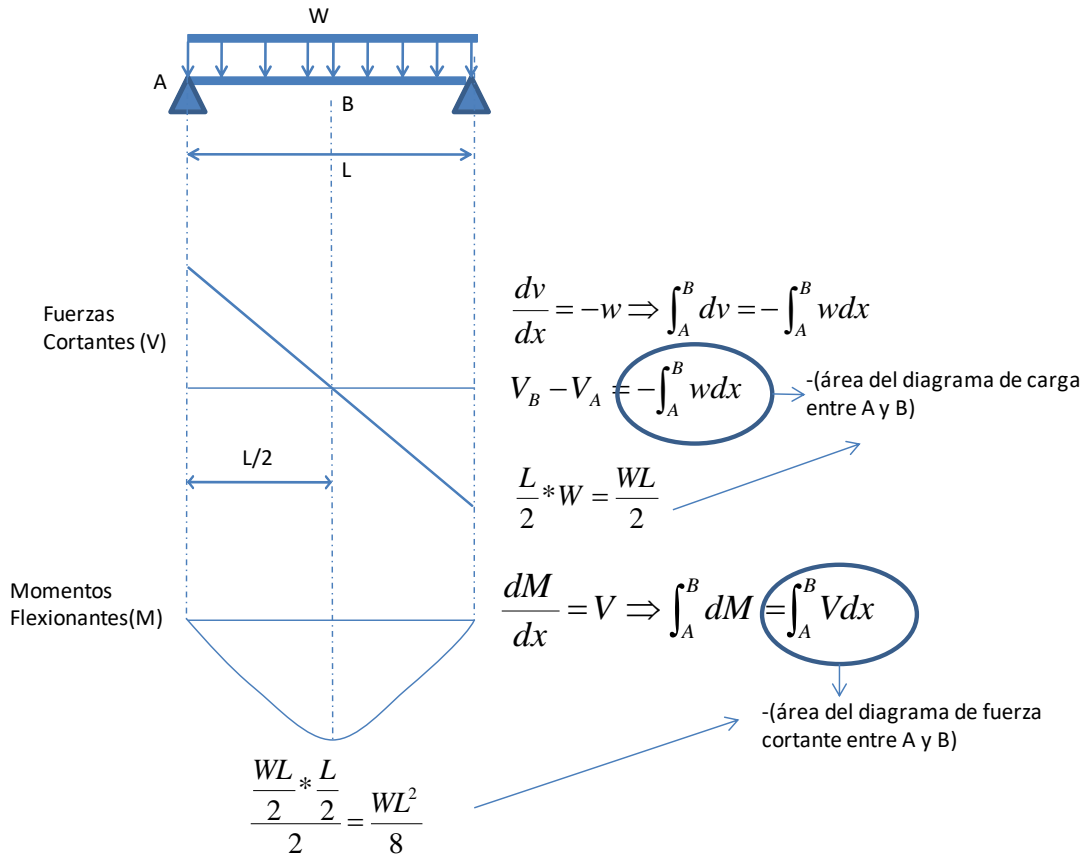


Figura 3 - 7. Relación entre carga, fuerzas cortantes y momento flexionantes, Fuente: Propia

Los diagramas de cortante y momentos mostrados en la anterior figura, son realizados basados en la teoría de la elasticidad, partieron del análisis un elemento infinitesimal con una longitud “dx” y una carga distribuida como se observa en la figura:

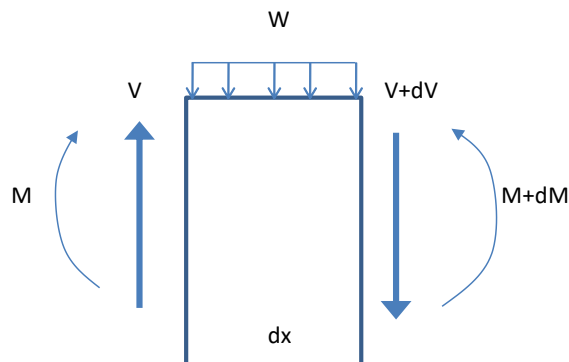


Figura 3 - 8. Elemento “dx” y la relación entre carga, fuerzas cortantes y momento flexionantes. Fuente: Adaptada de (Gere, 2006)

De las condiciones del anterior elemento infinitesimal, se puede deducir lo siguiente:

- La razón de cambio de la fuerza cortante (dV/dx), basados en la anterior figura, haciendo equilibrio de las fuerzas verticales, tanto de acción como de reacción, es:

$$\begin{aligned}
 -Wdx + v - (v + dv) &= 0 \\
 \frac{dv}{dx} &= -w
 \end{aligned}
 \tag{3 - 23}$$

- De lo anterior se encontró, que la razón de cambio de la fuerza cortante (dV/dx) de cualquier punto sobre el eje de la viga es igual al valor negativo de la intensidad de la carga distribuida en el mismo punto. Este cambio se expresa, como se muestra en la Figura 3 - 7 y en la ecuación (3 - 23), como una ecuación diferencial que se puede transformar en una integral, que representa finalmente que la fuerza cortante es el área del diagrama de carga entre los puntos que se estén estudiando (Ver Figura 3 - 7 y ecuación (3 - 24)) .

$$\begin{aligned}
 \frac{dv}{dx} = -w &\Rightarrow \int_A^B dv = - \int_A^B w dx && (3 - 24) \\
 V_B - V_A &= - \int_A^B w dx
 \end{aligned}$$

- Por otro lado, la razón de cambio del momento flexionante (dM/dx) de cualquier punto sobre el eje de la viga es igual a la fuerza cortante distribuida en el mismo punto. La anterior afirmación se logra al hacer equilibrio, es decir sumatorio de momentos con respecto al extremo del elemento infinitesimal que se presenta en la Figura 3 - 8. Dicha deducción se presenta continuación, donde se consideró que la multiplicación de dos elementos infinitesimales es un valor pequeño (cercano a cero), por lo cual se anulan o desprecian:

$$\begin{aligned}
M - (M + dM) + Wdx\left(\frac{dx}{2}\right) \\
+ (V + dV)dx \\
= 0 \\
-dM + Wdx\left(\frac{dx}{2}\right) + Vdx \\
+ dVdx = 0 \\
\frac{dM}{dx} = V
\end{aligned}
\tag{3 - 25}$$

- Este cambio también se expresa en la Figura 3 - 7. Como es una ecuación diferencial, que se puede transformar en una integral, lo que representa que el momento es el área del diagrama de fuerza cortante de los puntos que se estén estudiando.

$$\begin{aligned}
\int_A^B dM &= \int_A^B Vdx \\
M_A - M_B &= \int_A^B Vdx
\end{aligned}
\tag{3 - 26}$$

Los anteriores fundamentos, son reveladores, porque ayudan a entender el significado físico para la construcción de un diagrama de cortante y momento, por lo menos para una viga simplemente apoyada con una carga distribuida, que son indispensables para el proceso de diseño que más adelante se explica en este libro. Son válidos solamente cuando se tiene una viga con una carga externa constituida por una carga uniformemente distribuía y no por ejemplo para una viga con carga: puntual u otra, para lo cual se deben tener en cuenta otras consideraciones.

Para ello, se debe tener las competencias para desarrollar no solamente el sistema estático de la viga que se mostrada en la Figura 3 - 7, que es estáticamente determinada, si no cualquier viga incluyendo las que son estáticamente no determinadas, lo cual se desarrolla empleando otros métodos, que se mencionan en el capítulo 2 de este libro, como: Giro deflexión, Croos, análisis matricial, entre otros.

3.5.1.2 Esfuerzos de flexión en vigas

Para poder deducir la fórmula de flexión que relaciona los momentos con el esfuerzo normal es necesario recordar conceptos tales como: curvatura, deformaciones unitarias, relaciones entre curvatura y deformaciones unitarias, etc. Este tema se explica en detalle en la mayoría de los libros de mecánica de materiales o sólidos y por su importancia se recuerda a continuación.

La curvatura (κ) que sufre una viga producto de la flexión corresponde al recíproco del radio de curvatura (ρ), es decir:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (3 - 27)$$

La relación entre la deformación unitaria y la curvatura depende del radio de giro y está dada por la siguiente expresión:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (3 - 28)$$

Donde “y” es la distancia desde el eje neutro hasta el punto de estudio dentro de la sección transversal. El eje neutro es la zona donde no se presentan esfuerzos de tensión ni de compresión. Por otro lado, para un material elástico lineal y empleando la curva esfuerzo-deformación, se puede plantear la siguiente expresión, que relacionadas deformaciones unitarias (ε_x) con la curvatura(κ) y el esfuerzo normal(σ_x).

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = -\frac{E y}{\rho} = -E \kappa y \quad (3 - 29)$$

La relación entre el momento y el esfuerzo normal se basa en la siguiente ecuación diferencial y la siguiente integral:

$$dM = -\sigma_x y dA \quad (3 - 30)$$

$$M = - \int_A \sigma_x y dA$$

Al sustituir la ecuación (3 - 29) en la ecuación (3 - 30), se tiene:

$$M = \int_A k E y^2 dA = k E \int_A y^2 dA \quad (3 - 31)$$

De la ecuación anterior se sabe que el momento de inercia (I_g), está dado por:

$$I_g = \int_A y^2 dA \quad (3 - 32)$$

Por lo tanto, la relación entre momento y curvatura es siguiente, donde el la curvatura es proporcional al momento e inversamente proporcional a la cantidad EI:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3 - 33)$$

Al sustituir la ecuación (3 - 29) en la ecuación (3 - 33), se obtiene la formula básica del esfuerzo normal de flexión, mundialmente conocida y empleada en diferentes aplicaciones:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_g} \quad (3 - 34)$$

De la anterior ecuación se deduce que el esfuerzo norma de flexión es proporcional al momento e inversamente proporcional al módulo de elasticidad, además que varía linealmente con respecto a la distancia “y” desde el eje neutro. Los esfuerzos normales

máximos, tanto de compresión y tensión, se presentan localizados a la distancia desde el eje neutro hasta el extremo de la sección.

Para poder entender la formula básica de flexión, anteriormente deducida, se expone a continuación un ejemplo de los esfuerzos normales de flexión que se producen en una sección rectangular con una altura “h” y un ancho “b”. Para este ejemplo se supone la formula básica de flexión positiva y no negativa como esta en la ecuación (3 - 33) y que cuando los esfuerzos son a compresión son positivos y cuando son a tensión negativos.

En la Figura 3 - 9 se presente la solución de este caso, donde los esfuerzos en la fibra superior se denotaron como “ σ_t ” y los esfuerzos en la fibra extrema inferior como “ σ_b ”. Adicionalmente la fórmula de flexión se simplificó incluyendo un nuevo término, que corresponde al módulo de sección de la fibra extrema superior e inferior, cuyas expresiones son las siguientes:

$$S_t = \frac{I_g}{y_t} = \frac{bh^3}{6} \quad (3 - 35)$$

$$S_b = \frac{I_g}{y_b} = \frac{bh^3}{6} \quad (3 - 36)$$

Por ser una sección rectangular los dos módulos de sección son iguales y los esfuerzos que se presentan a continuación para cuando deben soportar un momento flexionante positivo y negativo, considerando que el esfuerzo a tensión es negativo y el de compresión es positivo.

Los anteriores conceptos son válidos para flexión pura de vigas prismáticas compuestas por materiales elásticos linealmente homogéneos.

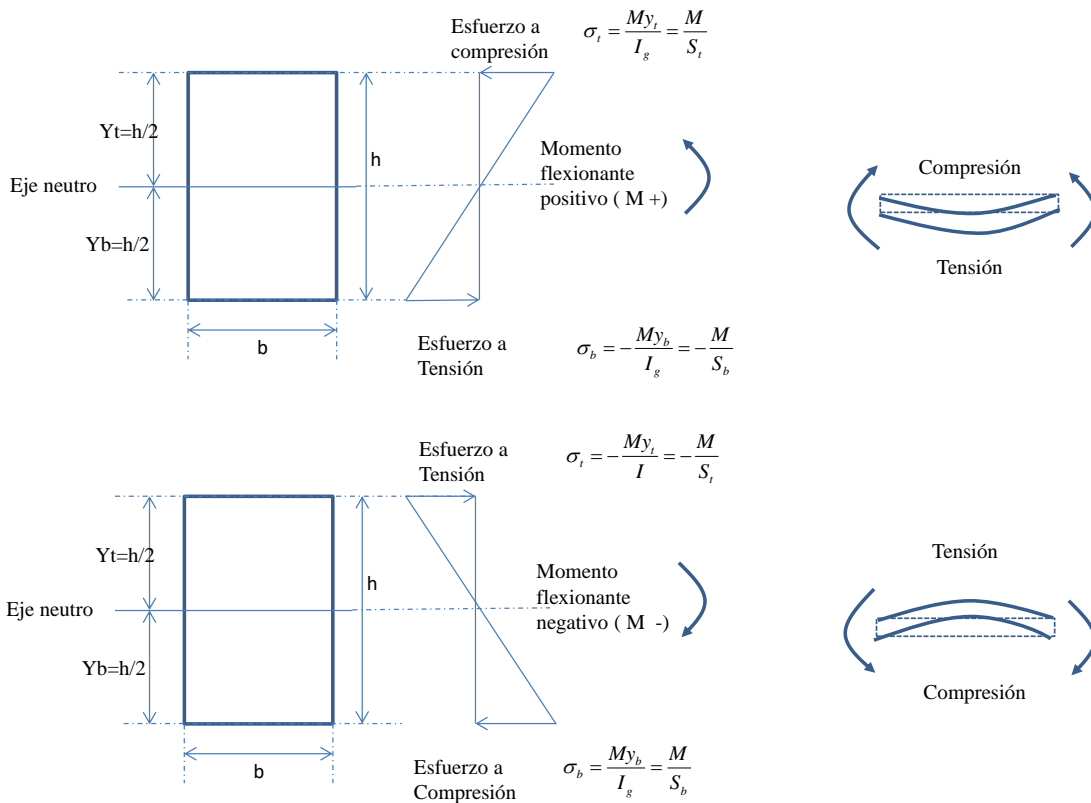


Figura 3 - 9. Esfuerzos de flexión en una viga rectangular. Fuente: Propia.

A través de la ecuación de flexión, anteriormente expuesta, se puede estudiar el comportamiento de las vigas a flexión sujetas a diferentes cargas, mientras permanezca en el rango elástico. También dicha ecuación es base para diferentes métodos de diseño, entre los que se encuentra el “método elástico”, que se explica en este capítulo.

3.5.1.3 Comportamiento de vigas de concreto

Los anteriores conceptos son aplicables para evaluar flexión para diferentes tipos de materiales, tales como: acero, madera, aluminio, concreto, etc. Para el caso de vigas en concreto reforzado, es necesario entender la forma como se comportan desde el punto de vista estructural, cuando están sometidas a diferentes magnitudes de carga, hasta que se presente la falla. Esto, teniendo en cuenta que la sección es mixta constituida por el concreto y el acero. Que las características mecánicas y de comportamientos estructural de estos los dos materiales son diferentes y que el concreto específicamente no es un material homogéneo, como se mencionó en los numerales anteriores de este capítulo, ya que está compuesto por la combinación de: cemento, agua, agregados gruesos, agregados finos y por aditivos (en algunas ocasiones).

Para ello, diferentes ingenieros o profesores han investigado en el laboratorio el comportamiento de vigas en concreto reforzado con diferentes condiciones aumentando

gradualmente la carga hasta que llegue a la falla. En estos trabajos de laboratorio se encontró que se presentan generalmente tres etapas en dichas vigas, que son: concreto no agrietado, concreto agrietado y falla. Dichas etapas se explican a continuación:

3.5.1.3.1 Concreto no agrietado:

Este caso se presenta cuando las cargas que se aplica sobre la viga son bajas, tanto que los esfuerzos actuantes que se producen de flexión son menores al **módulo de rotura**, cuya determinación se muestra en la ecuación (3 - 16). Este último término se define como el esfuerzo por flexión bajo el cual el concreto empieza a fisurarse y se explica en el numeral 3.1.4 de este libro.

En la siguiente figura se presenta este caso de comportamiento, aplicando las ecuaciones de flexión explicadas en la Figura 3 - 9, incluyendo las deformaciones unitarias y los esfuerzos en las fibras extremas. Especificando que el esfuerzo de tensión es menor que el módulo de rotura, por lo que no hay fisuración.

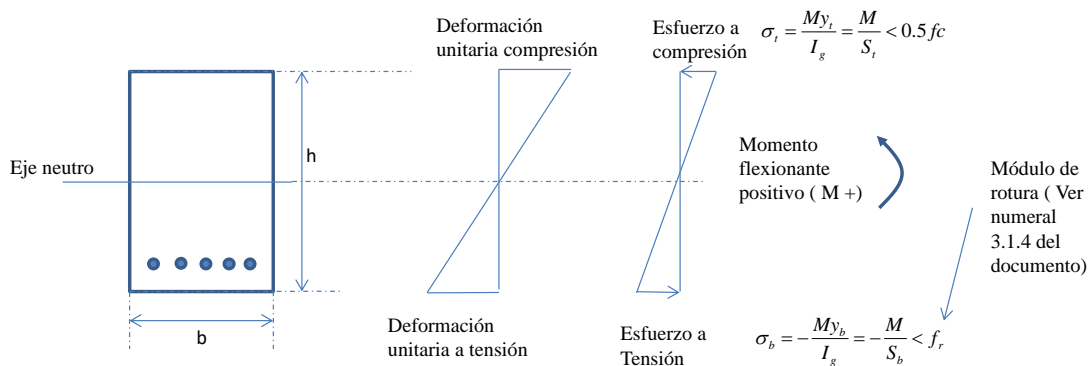


Figura 3 - 10. Caso del concreto no agrietado. Fuente: Propia.

3.4.1.3.2 Concreto agrietado – Etapa de esfuerzos elásticos

Cuando las cargas externas aumentan sobre la viga, es decir son mayores que las del caso anterior y producen esfuerzos de tensión mayores o iguales al del **módulo de rotura**, empiezan aparecer fisuras en la parte inferior del patín de la viga de una sola luz simplemente apoyada. Esta condición se esquematiza en la Figura 3 - 11:

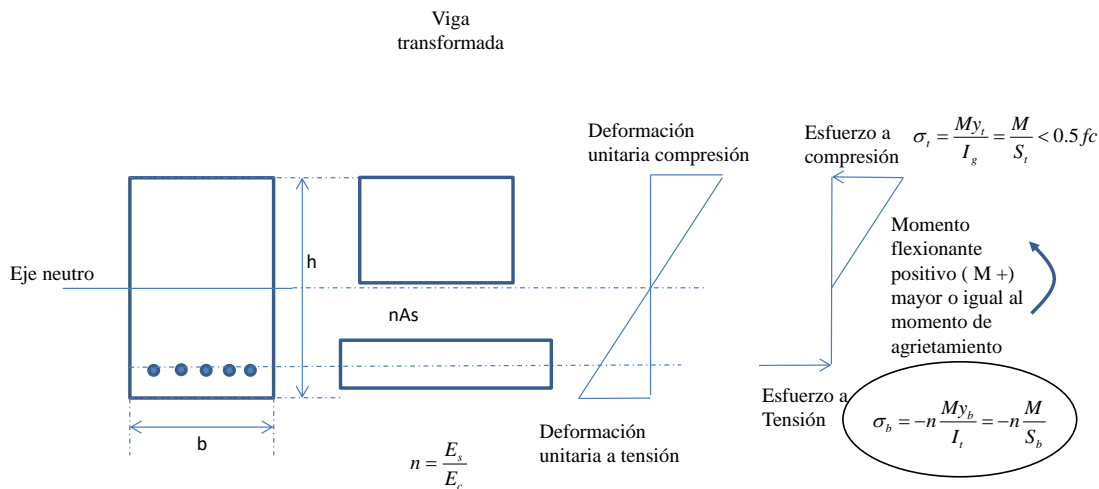


Figura 3 - 11. Caso del concreto agrietado. Nota: Las propiedades son de sección transformada (I_t , S_t , etc). “n” es la relación entre el módulo de elasticidad del acero y del concreto. Fuente: Propia.

La anterior condición representa que el momento actuante que se genera cuando se empiezan a producir fisuras en la viga, es igual o mayor que el de **Agrietamiento** y en la medida que las cargas estén aumentando las fisuras se acerca al eje neutro, como se observa en la Figura 3 - 12. Este momento de agrietamiento se determina basado en la fórmula de flexión explicada anteriormente y teniendo en cuenta el módulo de rotura (f_r). Para el caso del momento de agrietamiento, basado en el esfuerzo en la parte inferior de la viga, se tiene la siguiente ecuación:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{Y_b} \quad (3 - 37)$$

En dicha figura se muestra el caso de las fisuras de una viga simplemente apoyada con una carga distribuida mayor que la del caso anterior y en donde los esfuerzos actuantes son mayores al módulo de rotura o cuando el momento actuante es mayor que el momento de agrietamientos (M_{cr}).

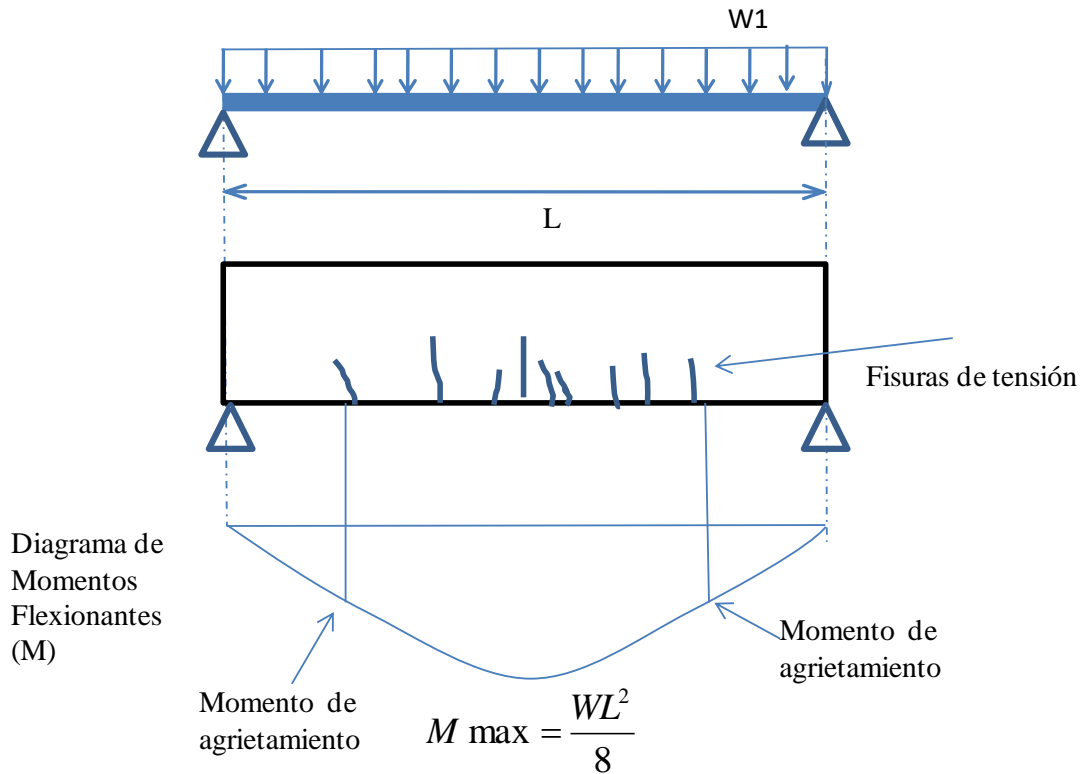


Figura 3 - 12. Fisuras de flexión de una viga simplemente apoyada. Fuente: Propia.

En esta etapa, el concreto en la zona fisura no aporta nada a tensión, lo cual lo asume en su totalidad el acero. La condiciones de esta etapa permanece en la medida que los esfuerzo a compresión en el concreto no sobrepasen aproximadamente el 50% de la resistencia de diseño del concreto (f_c) y el esfuerzo en el acero de refuerzo sea menor al límite de fluencia, es decir que no ha fluido o cedido.

La variación lineal de los esfuerzos y deformaciones se presentan en las vigas de concreto bajo condiciones normales de carga de servicio, ya que debió al nivel de esta cargar los esfuerzos actuantes son menores al 50% del f_c . Para calcular los esfuerzos en el concreto y el acero en esta etapa se utiliza la sección transformada que se explica más adelante en este documento. Bajo esta etapa se presentan momentos considerablemente mayores a los momentos de agrietamiento.

3.5.1.3.3 Resistencia última

Para esta etapa la variación de las deformaciones unitarias y los esfuerzos en el concreto y el acero son como los que se observan en la Figura 3 - 13. En este caso la deformación unitaria del acero es mayor que la deformación unitaria de fluencia (ϵ_y), es decir que fluye. Por otro lado, los esfuerzos del concreto no son lineales y corresponden al diagrama esfuerzo - deformación, con valores de esfuerzos que sobrepasan el 50% de la resistencia a compresión (f_c).

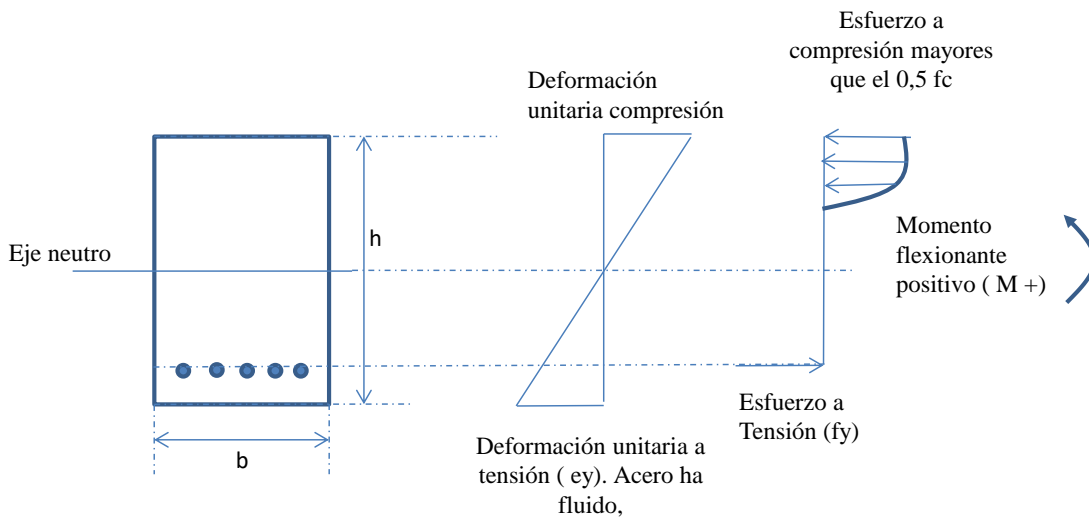


Figura 3 - 13. Caso del concreto en resistencia última. Fuente: Propia.

Para la viga simplemente apoyada con refuerzo solamente en la parte de tensión (simplemente armada), la falla en la viga se refleja con dos aspectos como se observa en la Figura 3 - 14:

- Grietas en la parte superior, es decir en la zona de compresión, que indican aplastamiento concreto
- Aumento de las fisuras comparadas con el caso anterior (concreto fisurado), las cuales se acercan más al eje neutro haciendo que este se desplace y la aparición de nuevas grietas que son a 45% en la zona de apoyo, que corresponden a cortante. Estas últimas pueden aparecer primero que la de flexión, lo cual depende del diseño estructural de cada viga.

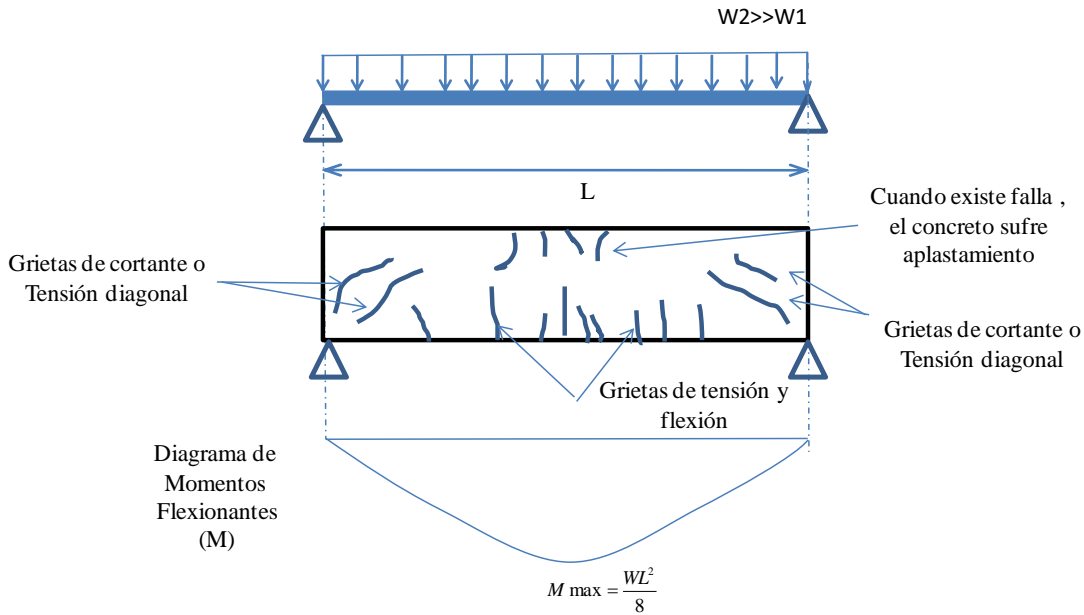


Figura 3 - 14. Fisuras de flexión en la zona de tensión y de aplastamiento en la zona de compresión de una viga simplemente apoyada. Fuente: Propia.

Sobre el tema anterior existen diferentes investigaciones experimentales, apoyados en el ensayo de vigas de concreto reforzado a escala real y cargadas gradualmente hasta observar las etapas que se explicaron incluyendo la falla. Una de ellas fue la realizada por (Nawy, 1998), cuyo resultados de la falla de una viga en concreto reforzado simplemente apoyada específicamente por flexión y no por cortante, que corresponde a la tercera etapa explicada anteriormente, se observan en la Figura 3 - 15 y Figura 3 - 24.



Figura 3 - 15. Fisuras de flexión en la zona de tensión y de aplastamiento en la zona de compresión de una viga simplemente apoyada experimentada por (Nawy, 1998).

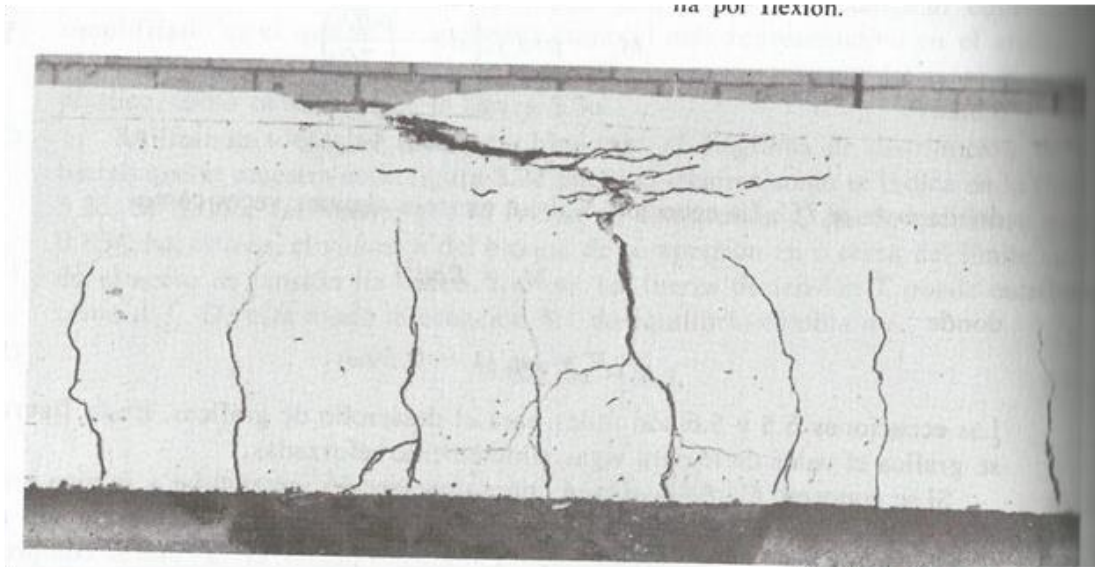


Figura 3 - 16. Parte en detall de las fisuras de flexión en la zona de tensión y de aplastamiento en la zona de compresión de una viga simplemente apoyada mostrada en la Figura 3 - 15. Fuente: (Nawy, 1998)

El ejemplo experimental mostrado anteriormente concuerda con la teoría explicada y es similar por ejemplo al esquema de falla mostrada para la etapa de resistencia en la Figura 3 - 14.

3.5.1.3.4 Diagrama momento - curvatura

Las tres etapas explicadas anteriormente, concreto sin agrietar, concreto agrietado y resistencia última se pueden también representar mediante un diagrama momento – curvatura. Para su construcción se debe evaluar cada una de las etapas, que incluye un análisis elástico lineal y otro no lineal, hasta obtener el siguiente diagrama:

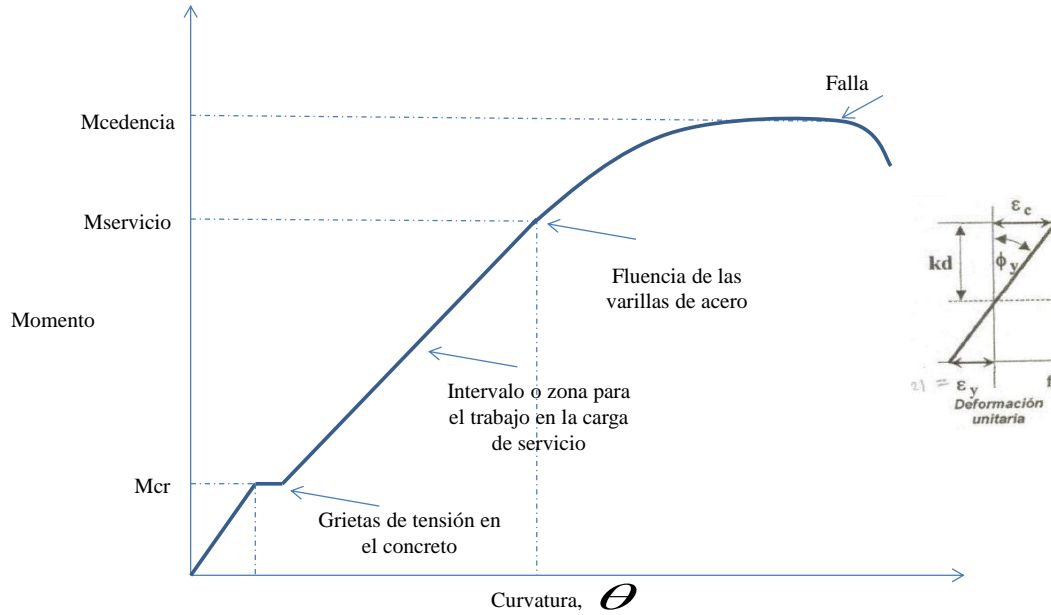


Figura 3 - 17. Diagrama momento vs curvatura. Fuente: (McCormac & Russell, 2009)

Se presenta un ejemplo de diagrama momento curvatura, para una viga rectangular con los siguientes materiales:

$$f_c := 28 \cdot \text{MPa} \quad f_y := 420 \cdot \text{MPa}$$

$$\gamma_{concreto} := 24 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \quad \gamma_{mortero} := 22 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$E_c := 4700 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} = (2.487 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$E_s := 200000 \cdot \text{MPa} \quad n := \frac{E_s}{E_c} = 8.042$$

También con la siguiente geometría:

$$b := 0.25 \cdot m \quad d' := 0.05 \cdot m$$

$$h := 0.5 \cdot m \quad d := h - d' = 0.45 \text{ m}$$

Este compuesto por tres barras No. 7 en la parte inferior. No se tiene en cuenta el acero a compresión.

$$A_s := 3 \cdot 3.84 \cdot \text{cm}^2 = 11.52 \text{ cm}^2$$

Se convierte la viga en una sección transformada, como se muestra a continuación, es decir en un solo material que es “concreto”, donde el acero se hace equivalente a $(n-1)A_s$, donde n es módulo basados en el módulo de elasticidad de cada material. Con esto se construye el primer punto, que es donde se produce agrietamiento. El momento depende de la ecuación de flexión en la mater elástica donde el esfuerzo depende del módulo de rotura y la inercia es de la sección transformada.

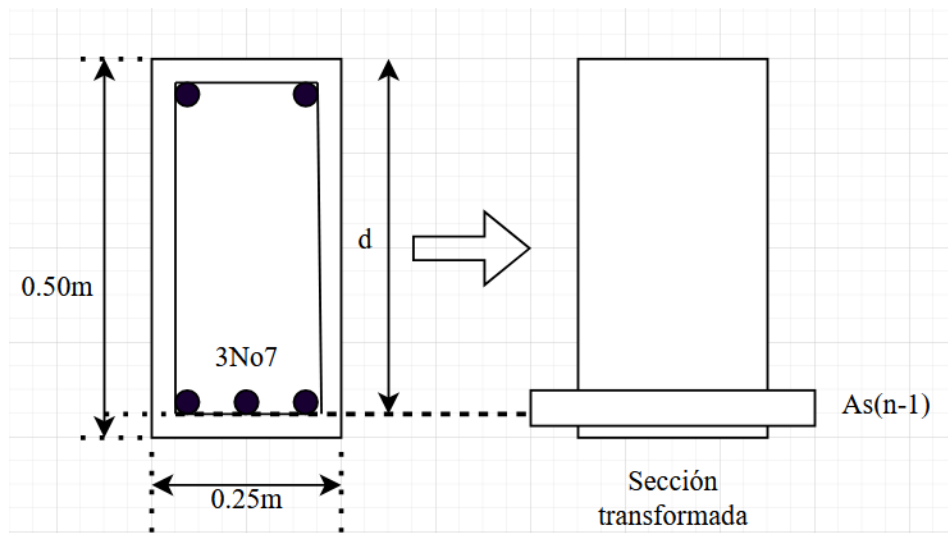


Figura 3 - 18. Sección transformada para el primer punto del diagrama.

$$y_g := \left(\frac{b \cdot h \cdot \frac{h}{2} + (n-1) \cdot A_s \cdot d}{A_e} \right) = 0.262 \text{ m}$$

$$I_x := b \cdot \frac{h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - yg \right)^2 + A_s \cdot (n-1) \cdot (d - yg)^2 = (2.909 \cdot 10^5) \text{ cm}^4$$

$$M_r := f_r \cdot \frac{I_x}{(h - yg)} = 40.129 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$O_r := \frac{M_r}{E_c \cdot I_x} = (5.547 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{\text{m}}$$

Se presenta a continuación el segundo punto del diagrama, que es el de “flexión”. Para esto se utiliza el diagrama esfuerzo deformación del concreto explicado anteriormente y es el de (Hognested, 1956). Se varia el valor de “c” hasta que haya equilibrio, es decir que las fuerzas a compresión sean iguales a las fuerzas a tracción.

$$c := 0.1969 \cdot \text{m} \quad e_y := \frac{f_y}{E_s} = 0.002$$

$$o_y := \frac{e_y}{(d - c)} = 0.008 \frac{1}{\text{m}}$$

$$e_c := o_y \cdot c = 0.002 \quad e_u := 2 \cdot \frac{f_c}{E_c}$$

$$f_{c1} := f_c \cdot \left(2 \cdot \frac{e_c}{e_u} - \frac{e_c}{e_u} \right)^2 = 14.739 \text{ MPa}$$

$$C := \frac{2}{3} \cdot f_{c1} \cdot c \cdot b = 483.7 \text{ kN}$$

$$e'c := (c - d') \cdot o_y = 0.001$$

$$T := A_s \cdot f_y = 483.84 \text{ kN}$$

Se logra equilibrio con error menor como se muestra a continuación:

$$C - T = -0.14 \text{ kN}$$

Se determina el momento como el brazo multiplicado por la fuerza.

$$My := C \cdot \left(d - \frac{3}{8} c \right) = 181.95 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ahora, se presenta el tercer punto, que es cuando se presenta la falla de la viga en su estado límite.

$$c := 0.09557 \cdot m$$

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot b \cdot 0.85 \cdot c = 483.345 \text{ kN}$$

$$T := A_s \cdot f_y = 483.84 \text{ kN}$$

$$C - T = -0.495 \text{ kN}$$

$$Mu := C \cdot \left(d - 0.85 \cdot \frac{c}{2} \right) = 197.883 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rho_u := \frac{0.003}{(c)} = 0.031 \frac{1}{m}$$

A continuación, se presenta el gráfico de este diagrama momento curvatura.

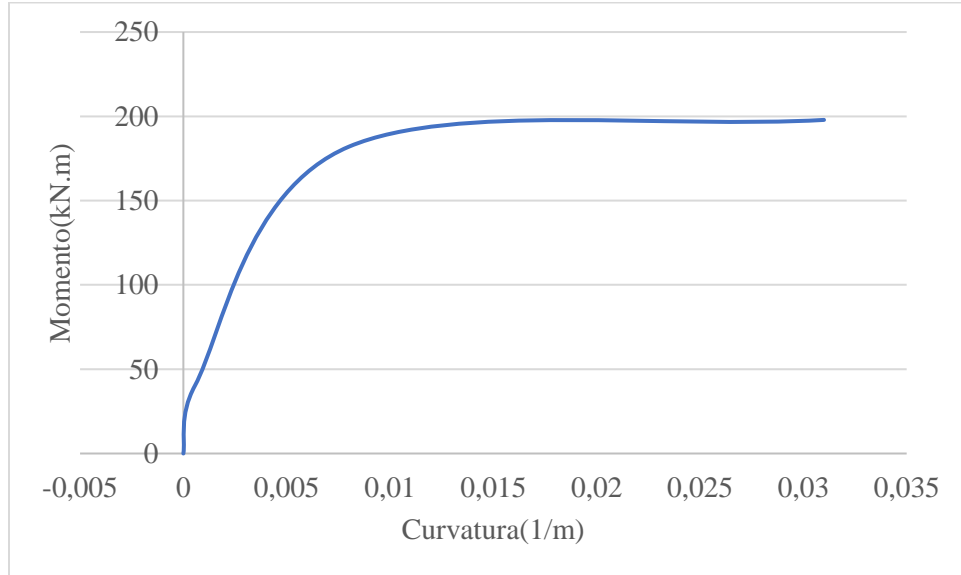


Figura 3 - 19. Diagrama momento curvatura

3.5.1.4 Métodos de diseño

En el mundo se han desarrollado diferentes métodos para el diseño a flexión de elementos de concreto reforzado, uno ha sido el “**método elástico**” y el otro es el de “**resistencia última**”. En la actualidad la mayoría de los ingenieros emplea el método de resistencia última, sin embargo, cabe anotar que el Código Americano del Concreto (ACI-318-95) y el apéndice C-A aceptan el método elástico para el diseño de elementos a flexión. Por esta razón es importante que los profesionales se documenten también sobre este método y lo consideren alternativa para sus actividades de diseño.

3.5.1.4.1 Método elástico o método de esfuerzos de trabajo

De acuerdo con (Uribe, 1991) , desde principios del siglo XX hasta la década de 1960, casi todos los diseños de estructuras de concreto reforzado en Estados Unidos se realizaron aplicando el método elástico, que también llaman *el método de esfuerzos de trabajo o diseño por el método de esfuerzos permisibles o admisibles*.

Es un método sencillo, cuyos principios se presentan a continuación y consisten en diseñar los elementos a flexión, de tal forma los esfuerzos actuantes sean menores o iguales a los esfuerzos admisibles, estos últimos afectados por un factor de seguridad. Sin embargo, a partir de 1963 el método de resistencia última ganó mucha más acogida, cuyas razones se explican en el numeral 3.4.1.4.2 de este documento. Aunque en la actualidad la mayoría de las estructuras son diseñadas por el método de resistencia última, es conveniente que los ingenieros estén familiarizados con las bases conceptuales *del método de esfuerzos de trabajo o diseño por el método de esfuerzos permisibles o admisibles*, por las siguientes razones:

- Los cálculos de deflexiones producidas por cargas de servicio en vigas requieren la determinación de la inercia fisurada, cuyo concepto se estudia en el método de esfuerzos de trabajo o elástico.
- El diseño de miembros de concreto pre esforzado se basa no solo en el método de resistencia, sino también en el cálculo de los esfuerzos elásticos en las condiciones de cargas de servicio.
- Algunos proyectistas usan el método de diseño esfuerzos de trabajo para diseñar estructuras que contienen líquido, como tanques de agua y estructuras sanitarias. Esto debido a que cuando se diseñan por estos métodos los esfuerzos se mantienen a niveles bastante bajos, por lo que el agrietamiento considerablemente menor y en consecuencia se tiene menos filtraciones.

Uno de las opciones de este método es utilizar el concepto de *sección transformada u homogénea*, cuyo uso se basa en las siguientes consideraciones:

- Los niveles de esfuerzos actuantes sobre la viga son mayores al módulo de rotura (f_r), luego la zona del concreto que está a tensión sufre un proceso de fisuración como se observa en Figura 3 - 12 que corresponde al caso de “Concreto agrietado” anteriormente explicado.
- Por estar agrietado el concreto de la sección de la viga en esta zona, este se desprecia y es el acero que asume la responsabilidad de soportar los esfuerzos que corresponden a esta parte que son de tensión.
- Este agrietamiento en la viga no implica que sufra una falla total.
- Se supone en este método, lo cual dependen del cuidado en la construcción, que existe una adherencia perfecta entre el acero y el concreto, con lo cual las deformaciones unitarias de ambos materiales son iguales en un punto particular.
- Los esfuerzos en los dos materiales serán proporcionales al módulo o razón modular de nominado: “ n ”, que es la división entre el módulo de elasticidad del acero (E_s) y el módulo de elasticidad del concreto (E_c), como se expresa a continuación.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3 - 38)$$

- En la siguiente figura se presentan la sección de una viga normal y otra transformada. Esta última queda de un solo material que es el concreto, ya que el acero se transformó a través del módulo “n”.

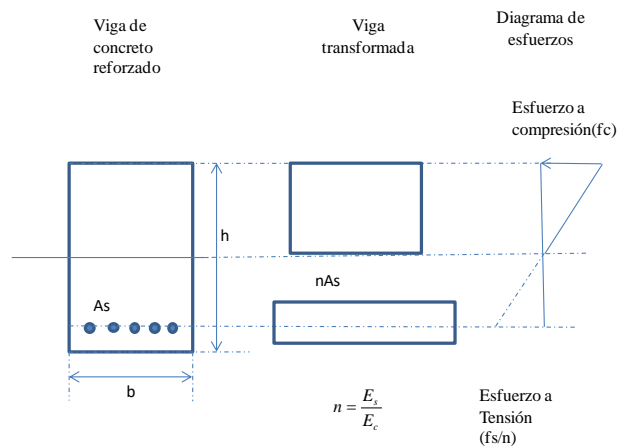


Figura 3 - 20. Viga normal y viga transformada. Fuente: Adaptada de (McCormac & Russell, 2009)

- En la anterior figura se observa un diafragma de esfuerzos, que son lineales porque se están en el rango elástico. También que en la zona de tensión, dicha línea es discontinua porque se suponen que esta zona esta agrietada y que no es capaz de resistir tensión.

Para poder entender este método se hacen a continuación algunos ejemplos prácticos:

Ejemplo 3 - 1: Revisar los esfuerzos de una viga de concreto reforzado, por el método elástico, que tiene una sección con una altura de 0.5 metros y un ancho de 0.30 metros. Considerar que la viga fue construida con concreto de una resistencia a la compresión de 21 Mpa y con un acero de refuerzo de 420 Mpa. También que tiene en la parte inferior refuerzo longitudinal constituido por cuatro varillas No. 6(6/8´) y que debe resistir un momento actuante positivo de 50 kN.m.

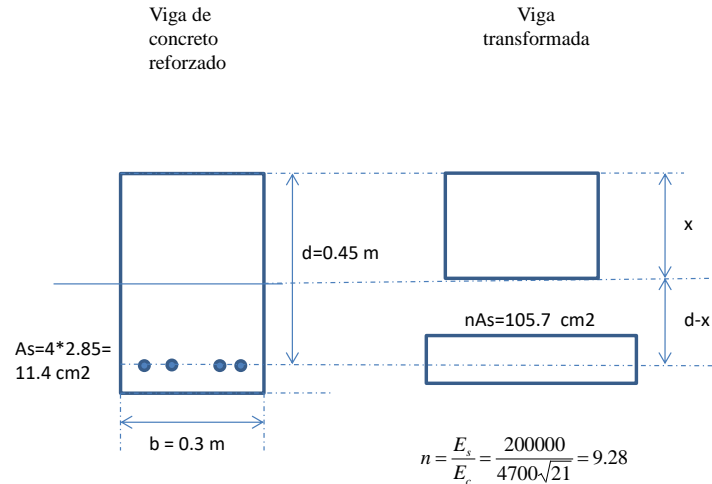


Figura 3 - 21. Datos de la viga del Ejemplo 3 - 2. Fuente: Propia.

Se tiene como se muestra en la anterior figura que el valor de “n”, que es la relación entre los módulos de elasticidad de los dos materiales de la viga es de 9.28 y que el área transformada del acero es de 105.7 cm². Tomando momento con respecto al eje neutro se determina su localización, que es “x”:

$$\begin{aligned}
 nAs(d - x) &= 0.3x\left(\frac{x}{2}\right) \\
 0.01077 * (0.45 - x) &= 0.15x^2 \\
 0.15x^2 + 0.01077x - 0.00485 &= 0
 \end{aligned}$$

La anterior, es una ecuación cuadrática de segundo orden, cuya solución general son dos raíces:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned} \tag{3 - 39}$$

Dónde: $a=0.15$, $b=0.01058$ y $c=-0.00476$, por lo cual el valor de “ x ” es de 0.146 m. Posteriormente se determinan la inercia de la sección transformada:

$$I_{trans} = \frac{0.3 * x^3}{12} + 0.3 * x * \left(\frac{x}{2}\right)^2 + nAs(d - x)^2 = 0.00128m^4$$

Aplicando las fórmulas de flexión deducida en el 3.4.1.2 y que se muestran en la Figura 3 - 9, se determina a continuación los esfuerzos de flexión en la parte superior e inferior de la viga:

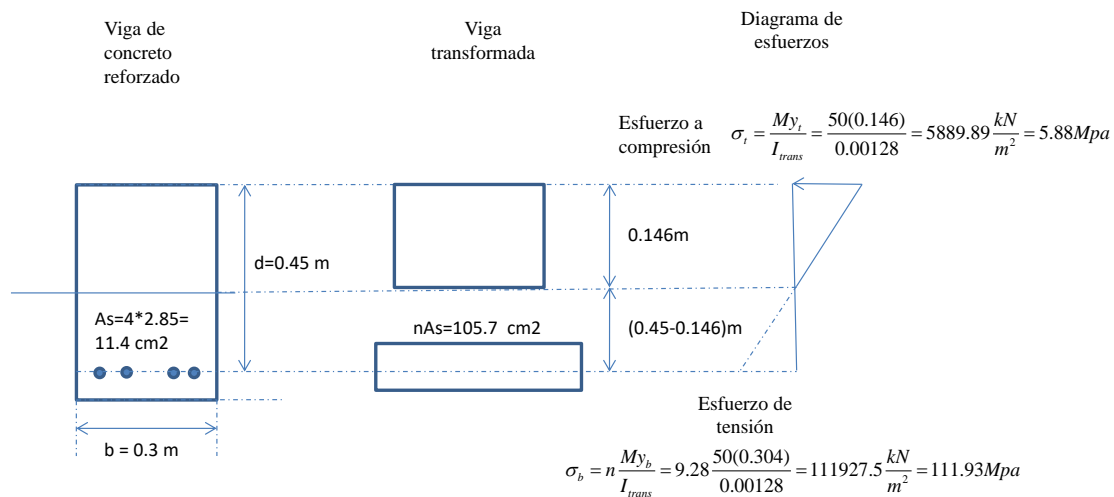


Figura 3 - 22. Determinación de los esfuerzos elásticos de flexión. Fuente: Propia.

Ejemplo 3 - 3: Determinar el momento que resiste la viga del ejemplo anterior teniendo en cuenta que el esfuerzo admisible a compresión es de 9.5 Mpa y el de tensión 120 Mpa. Verificar si es una sección sub-reforzado o sobrerreforzada.

El momento resistente de la viga en concreto a compresión es:

$$M_t = \frac{9.5 * 1000 * I_{trans}}{x} = 80.64 kN.m$$

El momento resistente de la viga en concreto a tensión es:

$$M_t = \frac{120 * 1000 * I_{trans}}{n(d - x)} = 53.60 kN.m$$

Por lo tanto el momento que resiste dicha viga es de 53.60 kN.m. Por otro lado, como predomina es la tensión en la viga, ya que el esfuerzo de tensión es mayor que el esfuerzo de compresión, y ambos son menores al admisible, es una sección sub-reforzada.

Ejemplo 3 - 4: Determinar el área del acero de refuerzo necesario para la viga, si tiene que resistir un momento actuante de servicio de 60 kN.m.

Para solucionar este punto, se construye una tabla donde se varía el área de acero y se determina el momento resistente, como se observa a continuación:

							Esfuerzos actuantes		Momentos resistentes		
As(cm2)	nAs	a	b	c	x(m)	I(m4)	ft (Mpa)	fb(Mpa)	Mt	Mb	Maximo
1.42	13.19	0.15	0.0013	-0.0006	0.06	0.0002	13.67	837.00	34.74	7.17	7.17
2.13	19.78	0.15	0.0020	-0.0009	0.07	0.0003	11.45	563.32	41.48	10.65	10.65
2.84	26.37	0.15	0.0026	-0.0012	0.08	0.0004	10.13	425.81	46.90	14.09	14.09
3.55	32.96	0.15	0.0033	-0.0015	0.09	0.0005	9.23	342.96	51.47	17.49	17.49
4.26	39.56	0.15	0.0040	-0.0017	0.10	0.0006	8.56	287.52	55.46	20.87	20.87
4.97	46.15	0.15	0.0046	-0.0020	0.10	0.0006	8.05	247.79	59.00	24.21	24.21
5.68	52.74	0.15	0.0053	-0.0023	0.11	0.0007	7.64	217.90	62.20	27.54	27.54
6.39	59.34	0.15	0.0059	-0.0026	0.11	0.0008	7.30	194.58	65.11	30.83	30.83
7.1	65.93	0.15	0.0066	-0.0029	0.12	0.0008	7.01	175.88	67.79	34.11	34.11
7.81	72.52	0.15	0.0073	-0.0032	0.12	0.0009	6.76	160.54	70.28	37.37	37.37
8.52	79.12	0.15	0.0079	-0.0035	0.13	0.0010	6.54	147.73	72.59	40.62	40.62
9.23	85.71	0.15	0.0086	-0.0038	0.13	0.0010	6.35	136.86	74.76	43.84	43.84
9.94	92.30	0.15	0.0092	-0.0041	0.14	0.0011	6.18	127.52	76.80	47.05	47.05
10.65	98.89	0.15	0.0099	-0.0044	0.14	0.0012	6.03	119.41	78.72	50.25	50.25
11.4	105.86	0.15	0.0106	-0.0047	0.14	0.0012	5.89	111.93	80.65	53.61	53.61
12.11	112.45	0.15	0.0112	-0.0049	0.15	0.0013	5.77	105.68	82.37	56.77	56.77
12.82	119.04	0.15	0.0119	-0.0052	0.15	0.0013	5.65	100.12	84.02	59.93	59.93
13.53	125.64	0.15	0.0126	-0.0055	0.15	0.0014	5.55	95.13	85.59	63.07	63.07
14.24	132.23	0.15	0.0132	-0.0058	0.16	0.0014	5.45	90.63	87.08	66.20	66.20
14.95	138.82	0.15	0.0139	-0.0061	0.16	0.0015	5.37	86.55	88.52	69.32	69.32
15.66	145.42	0.15	0.0145	-0.0064	0.16	0.0015	5.28	82.84	89.90	72.43	72.43

Tabla 3 - 13 Momento resistente para diferentes áreas de acero

Basados en la tabla anterior, se construyó una gráfica de momento resistente vs área de acero, la cual se expone a continuación:

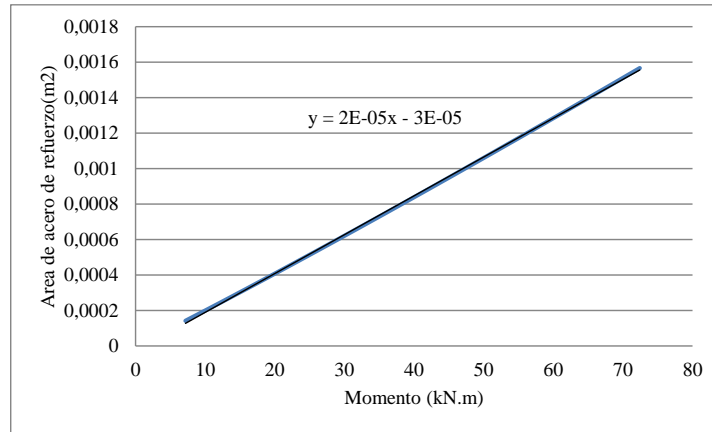


Figura 3 - 23. Grafica momento resistente vs área de acero de refuerzo. Fuente: Propia.

De esta gráfica, se obtuvo la siguiente ecuación, que logra relacionar área de acero necesaria (A_s) contra momento actuante (M), pero específicamente para las condiciones de este ejercicio:

$$A_s = 2e^{-05}M - 3e^{-05}$$

De esta ecuación, se obtiene que se necesita un área de acero de 0.00117 m², es decir 11.7 cm². Con tres varillas No.7 localizadas en la parte inferior se cumple la sollicitación exigida.

3.5.1.4.2 Resistencia última

En el método de resistencia última, se estudia el comportamiento de la estructura en el momento de la falla, es decir en la tercera etapa estudiada en el numeral 3.4.1.3, con lo cual se puede identificar en forma más apropiada los factores de seguridad. En este método la falla se considera cuando el acero fluye, es decir que su esfuerzo sobre pasa el límite de fluencia (F_y). Además, se diseña controlando el comportamiento estructural del elemento, de tal forma se presente la falla primero el acero y después en el concreto, el cual se produce por aplastamiento, es decir secciones “Sub-reforzadas”.

3.5.1.4.2.1 Concepto básico de confiabilidad estructural

De acuerdo con la referencia (E. E. Muñoz et al., 2014), a través de las técnicas de confiabilidad estructural, que se expresan normalmente en términos probabilísticos, se identifica la capacidad que tiene una estructura o un elemento estructural para cumplir los requisitos especificados, incluyendo la vida útil de cálculo, para las que ha sido proyectado.

Los métodos probabilistas utilizados en la confiabilidad representan el paradigma científico en seguridad estructural y permiten incorporar el conocimiento actualizado, sin embargo, con dificultades de aplicación por la escasez de datos estadísticos y el grado de complejidad de los sistemas estructurales. Las estructuras deben proyectarse con grados de confiabilidad apropiados que tengan en cuenta los recursos económicos y que estén preparados para soportar las acciones y condicionantes que puedan ocurrir durante su ejecución y uso. Además, se conciben para que sea una estructura durable, con el adecuado mantenimiento y con una seguridad pertinente frente a acciones accidentales.

3.5.1.4.2.2 Secciones simplemente armadas (refuerzo de acero a tensión):

Una sección que se diseña como simplemente armada, es aquella donde solamente se tiene en cuenta durante el diseño la contribución del acero de refuerzo que está en la zona de tensión y no se tiene en cuenta la contribución del acero que está en la zona de compresión.

La deducción de este caso se basa en el esquema que se observa en la Figura 3 - 24, donde se observa una sección con solamente refuerzo en la parte de abajo (porque está sujeta a un momento positivo, es decir compresión en la parte superior y tensión en la parte inferior), que es la zona de tensión y los diagramas de deformaciones unitarias y fuerzas. Para esto se va a emplear el método de Whitney, el cual considera una distribución rectangular de los esfuerzos a compresión a un nivel de $0.85f_c$.

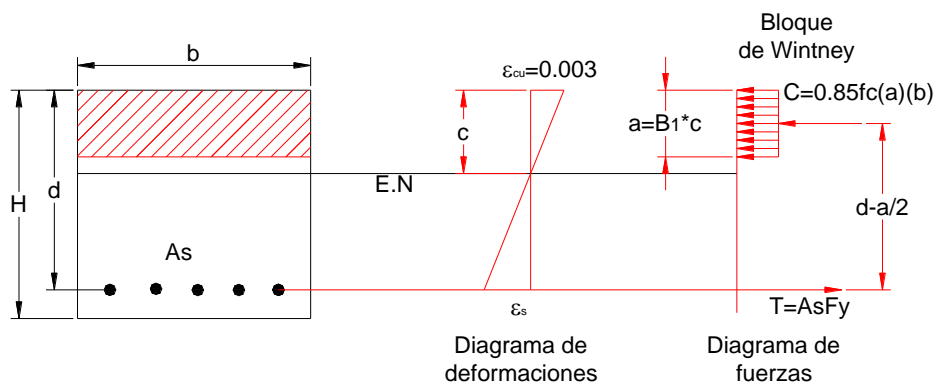


Figura 3 - 24. Diagrama de deformaciones unitarias y fuerzas de una sección simplemente armada que está sujeta a un momento flexionante positivo.

Para determinar el momento resistente nominal, se calcula la fuerza de tensión o de compresión por su correspondiente brazo, con lo cual se tiene:

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (3 - 40)$$

$$\phi M_n = \phi 0.85 f_c (a)(b) \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (3 - 41)$$

La variable “a” es la distancia del bloque de Wintney, depende de una variable “B1” y se define como:

$$a = B1c \quad (3 - 42)$$

Donde B1 es de 0.85 para concretos con resistencia menor o igual a 28 Mpa. Cuando la resistencia es mayor a 28 Mpa, se debe emplear la siguiente ecuación:

$$B1 = 0.85 - 0.05 \left[\frac{f_c - 28}{7} \right] \geq 0.65 \quad (3 - 43)$$

Como se debe cumplir en la sección de la viga un equilibrio, es decir que la fuerza de tensión y de compresión sean iguales (C=T), entonces se tiene:

$$AsF_y = 0.85 f_c (a)(b)$$

Por lo tanto:

$$a = \frac{AsF_y}{0.85 f_c (b)} \quad (3 - 44)$$

Considerando las siguientes constantes:

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} \quad (3 - 45)$$

$$R_n = \frac{Mu}{bd^2} \quad (3 - 46)$$

Además incluyendo en la deducción el término de cuantía de acero, que es el área de acero sobre el área de afectiva de concreto (es adimensional):

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3 - 47)$$

Remplazando las ecuaciones (3 - 45) y (3 - 46) en la ecuación (3 - 44), se tiene:

$$a = m\rho d \quad (3 - 48)$$

Remplazando (3 - 47) y (3 - 48) en (3 - 40) tenemos:

$$\phi Mn = \phi \rho b d^2 f_y \left(1 - \frac{\rho m}{2}\right) \quad (3 - 49)$$

Considerando la resistencia nominal afectada por el factor de reducción igual al momento último mayorado (M_u), se tiene:

$$M_u = \phi \rho b d^2 f_y \left(1 - \frac{\rho m}{2}\right) \quad (3 - 50)$$

Remplazando (3 - 46) en (3 - 50) queda:

$$R_n = \phi \rho f_y \left(1 - \frac{\rho m}{2}\right) \quad (3 - 51)$$

Al resolver la anterior ecuación cuadrática, teniendo como variable desconocida la cuantía de acero, se tiene:

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mR_n}{\phi f_y}} \right] \quad (3 - 52)$$

La expresión (3 - 40) se puede también expresar de la siguiente forma, que es útil cuando se necesita calcular el momento resistente de una viga existente, de la cual se conoce: geometría de sección transversal, propiedades mecánicas de los materiales y área de acero:

$$\phi Mn = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c}\right) b d^2 \quad (3 - 53)$$

- **Cuantía máxima**

El diseño por el método de la resistencia última se basa en lograr secciones *sub-reforzadas* y *no sobre reforzadas*, con lo cual se asegura que falla primero el acero y posteriormente el concreto. De esta forma se garantiza una falla dúctil y no súbita (frágil). Es indispensable evitar diseñar secciones sobre-reforzadas, que se producen cuando falla primero el concreto y después el acero, lo cual sería una falla inadecuada, por ser: frágil y súbita. Esto se hace cuando la cuantía de la sección es **menor** a la cuantía balanceada, que se identifica cuando las deformaciones últimas tanto del concreto como la del acero se producen simultáneamente. Basados en lo anterior, se deduce a continuación la cuantía balanceada. Para el caso balanceado el diagrama de deformaciones unitarias es el siguiente:

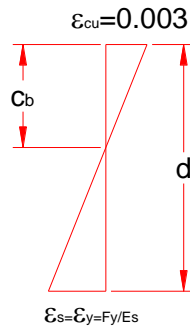


Figura 3 - 25. Diagrama de deformaciones en el caso balanceado

El eje neutro no sería para este caso “c” si no “c_b”. Aplicando relación de triángulos que se observa en la Figura 3 - 25, se tiene.

$$c_b = \frac{d \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} = \frac{0.003(d)}{0.003 + F_y / E_s} \quad (3 - 54)$$

De la ecuación (3 - 48), se deduce:

$$c_b = \frac{m \rho d}{B_1} \quad (3 - 55)$$

Igualando (3 - 55) y (3 - 54) tenemos la cuantía balanceada:

$$\rho_b = 0.85 B_1 \frac{f_c}{F_y} \frac{E_s * 0.003}{E_s * 0.003 + F_y} \quad (3 - 56)$$

La NSR-10 recomienda que la cuantía máxima sea el 75% de la cuantía balanceada, con lo cual se asegura que la falla está controlada primero por el acero y después por el concreto:

$$\rho_{\max} = 0.75 * \rho_b \quad (3 - 57)$$

Dicha cuantía balanceada y máxima depende de la resistencia del concreto y el acero, como se observa en la siguiente tabla.

Fc (Mpa)	B1	Fy (Mpa)	ρ_b	ρ_{\max}
21	0.850	240	0.04540438	0.03405328
28	0.850	240	0.06053917	0.04540438
35	0.800	240	0.07122255	0.05341692
40	0.764	240	0.07776340	0.05832255
21	0.850	420	0.02141869	0.01606402
28	0.850	420	0.02855825	0.02141869
35	0.800	420	0.03359795	0.02519846
40	0.764	420	0.03668347	0.02751260

Ec 203900 Mpa

Tabla 3 - 14 Cuantías balanceada y máxima para diferentes resistencias del acero y el concreto

- **Cuantía mínima**

Para asegurar una ductilidad mínima de la sección y evitar problemas de fisuración, las normas establecieron cuantía mínima. De acuerdo con la NSR-10 se recomienda la siguiente expresión para esta cuantía para elementos sometidos a flexión:

$$\rho_{\min} = \frac{\sqrt{f_c}}{4 f_y} \geq \frac{1.4}{F_y} \quad (3 - 58)$$

La (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) establece dicho requisito en función del A_s y se expresa de la siguiente forma (C.10.5 de la NSR-10):

$$A_{s\min} = \frac{0.25\sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \geq \frac{1.4}{F_y} b_w d \quad (3 - 59)$$

Igualmente, la (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) especifica que para losas estructurales y zapatas de espesor uniforme, $A_{s\min}$ en la dirección de la luz debe ser el mismo requerido por C.7.12.2.1. El espaciamiento máximo de este refuerzo no debe exceder tres veces el espesor,

ni 450 mm. Recomienda que la cuantía de refuerzo de retracción y temperatura deba ser al menos igual a los valores dados a continuación, pero no menos que 0.0014.

Casos	Cuantía mínima
En losas donde se empleen barras corrugadas Grado 280 o 350	0.0020
En losas donde se empleen barras corrugadas Grado 420 o refuerzo electrosoldado de alambre	0.0018
En losas donde se utilice refuerzo de una resistencia a la fluencia mayor que 420 MPa	$\frac{420}{F_y} 0.0018$

Tabla 3 - 15 Cuantía mínimas para el caso de losas en concreto reforzado

- **Factor de reducción de resistencia**

Según los comentarios del numeral C.9.3 de la NSR-10 **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**], basados en las investigaciones del ACI (318-08), los valores de los factores de reducción de resistencia se determinaron empleando las técnicas de confiabilidad estructural. Estos factores se basan en las siguientes razones:

- Por la incertidumbre que se puede presentar en una construcción, donde se pueden presentar elementos con una resistencia baja y que las dimensiones no sean exactamente iguales a las concebidas en el diseño.
- Por inexactitudes en las ecuaciones de diseño.
- Incluir el grado de ductilidad y la confiabilidad
- Por la importancia del elemento en la estructura.
- Entre otras.

Los factores de reducción dependen del comportamiento que vaya a tener cada elemento. Un elemento que esté controlado por compresión tiene un factor de reducción menor que cuando esté controlado por tensión, ya que tiene menor ductilidad y más sensible a las variaciones de la resistencia del concreto. Las investigaciones establecieron que se defina el valor de dicho factor en función de las deformaciones unitarias que tiene el acero de refuerzo. Para acero grado 420 dicho factor se determina de acuerdo con la siguiente gráfica:

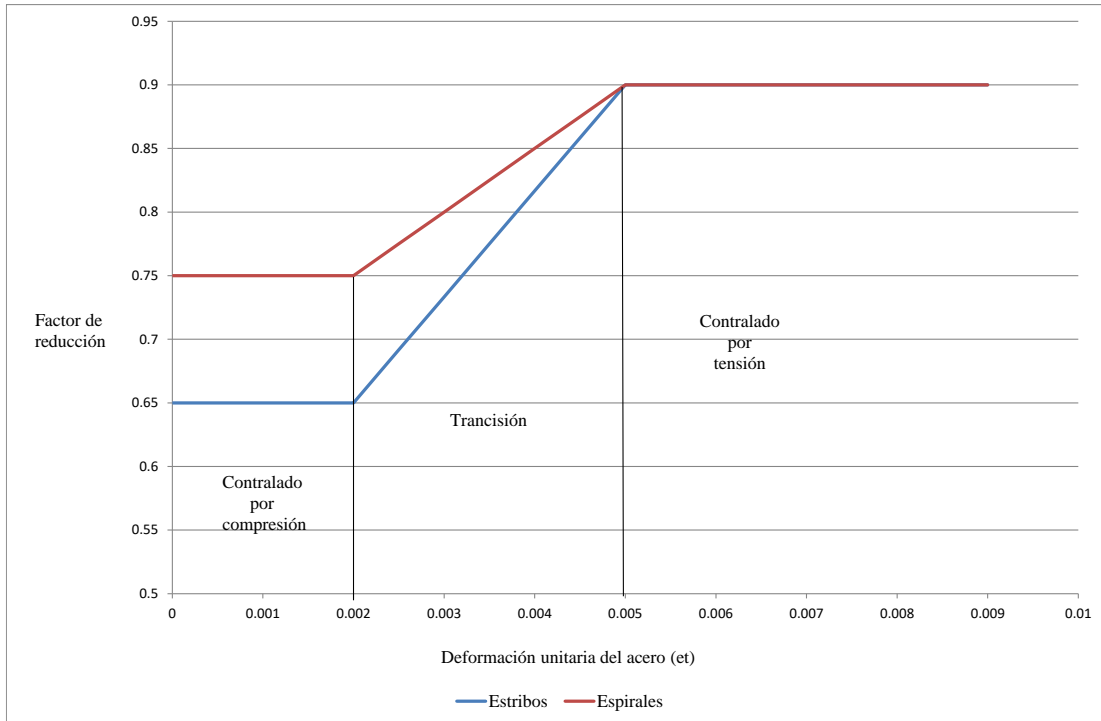


Figura 3 - 26. Factores de reducción de resistencia a flexión para acero grado 420. Fuente: (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010)

Para la zona de transición se utilizan las siguientes ecuaciones. Para estribos:

$$\phi = 0.65 + (et - 0.002)\left(\frac{250}{3}\right) \quad (3 - 60)$$

Y para espirales:

$$\phi = 0.75 + (et - 0.002)(50) \quad (3 - 61)$$

Ejemplo 3 - 5: Diseño a flexión de una viga rectangular en concreto reforzado simplemente armada.

Para una viga rectangular en concreto reforzado, que tiene sección transversal de 0.35 m de ancho por 0.55 de altura, se debe determinar la armadura a flexión necesaria para tener la capacidad de resistir un momento último de 250 KN.m. Para ello, tener en cuenta que tiene una resistencia a la compresión de 21 MPa y un límite de fluencia del acero de 420 MPa.

Inicialmente se considera un recubrimiento de 0.05m, por lo tanto dicha viga tiene una altura efectiva (d) de 0.50 m. Utilizando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53 \qquad Rn = \frac{250}{(0.35)(0.50)^2} = 2857.14 \frac{KN}{m}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mRn}{\phi f_y}} \right] = \frac{1}{23.53} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(23.53)(2857.14)}{(0.9)(420000)}} \right] = 0.00838$$

Se determinó que esta sección es sub-reforzado, ya que la cuantía requerida es menor a la cuantía máxima, que corresponde para este caso a 0.01606. Por otro lado esa cuantía calculada es mayor que la cuantía mínima, ya que:

$$\rho_{\min} = \frac{\sqrt{f_c}}{4 f_y} = 0.0027 \geq \frac{1.4}{F_y} = 0.00333$$

Al estar dicha cuantía entre la mínima y la máxima se utiliza la calculada. En caso de que hubiese sido la cuantía calculada menor que la mínima se hubiese utilizado la mínima para el diseño. Si hubiese sido mayor a la máxima sería una sección sobre reforzada y sería necesario realizar un rediseño de la sección de la viga o el cambio de las especificaciones de los materiales (concreto o acero).

$$A_{s_{requerida}} = 0.00838(35)(50) = 14.67 \text{ cm}^2$$

Para cumplir con este requerimiento a flexión, se busca la combinación más adecuada empleando las especificaciones de las varillas comerciales que se presentan en el mercado nacional y se exponen en la Tabla 3 - 3. Una de las opciones de diseño consiste en tres (3) varillas No.8 (1') que proporcionan un área total de 15.3 cm², como se observa a continuación:

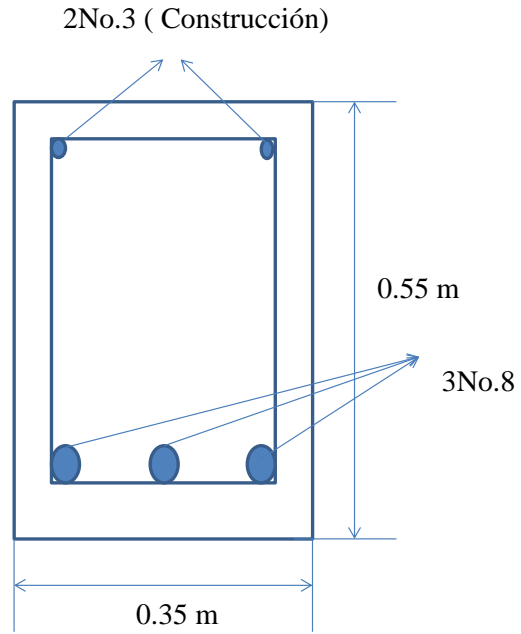


Figura 3 - 27. Resultados de diseño a flexión de viga simplemente armada

Se debe verificar si caben dentro del ancho de la viga el refuerzo calculado. Para ellos se tienen las siguientes dimensiones:

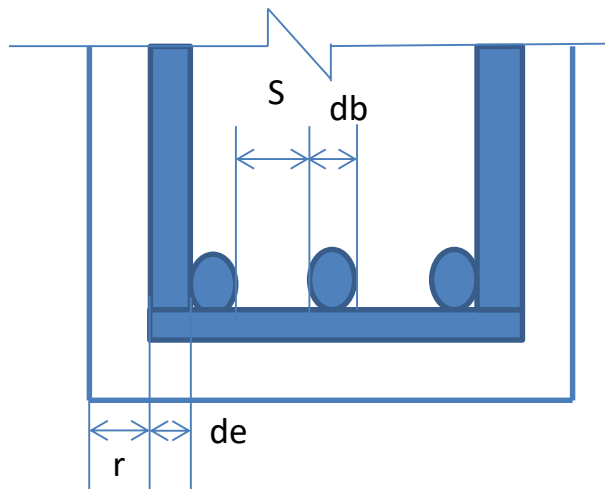


Figura 3 - 28. Esquema para determinar si caben barras en sección de viga

$$b_{\text{mínimo}} = 2r + 2de + (n - 1)S + ndb$$

Dónde:

- r : El recubrimiento hasta el borde del estribo (r = 2.5 cm)
 de : El diámetro del estribo (de = 0.95 cm)
 n : El número de barras (n=3)
 S : Separación entre barras. Es mayor valor de:
- 2.5 cm
 - 1.33 veces el tamaño máximo del agregado
 - Diámetro de la mayor barra (db=2.54 cm)

Por lo tanto:

$$b_{\text{mínimo}} = 2(2.5) + 2(0.95) + (3 - 1) * 2.54 + 3 * 2.54 = 19.6\text{cm} < 35\text{cm}$$

También es necesario verificar la distancia efectiva “d”, conociendo el diámetro de las barras que se van a colocar y recalculando el momento resistente, con el objeto de compararlo con el momento último actuante.

$$d = h - r - de - db / 2 = 50.28\text{cm}$$

De acuerdo a lo anterior el momento nominal resistente es:

$$a = \frac{AsFy}{0.85fc * b} = \frac{5.1 * 3 * 420}{0.85 * 21 * 35} = 10.28\text{cm}$$

$$\phi M_n = \phi Asfy \left(d - \frac{a}{2} \right) = 0.9 * (0.00153) * 420000 * \left(0.5028 - \frac{0.1028}{2} \right) = 261.06\text{KN.m} > Mu_{ok}$$

Es necesario también verificar el factor de reducción de resistencia, el cual se asumió inicialmente en este ejercicio con un valor de 0.90. Para ello es necesario calcular la deformación unitaria (ϵ_t) con que queda el acero de esta sección.

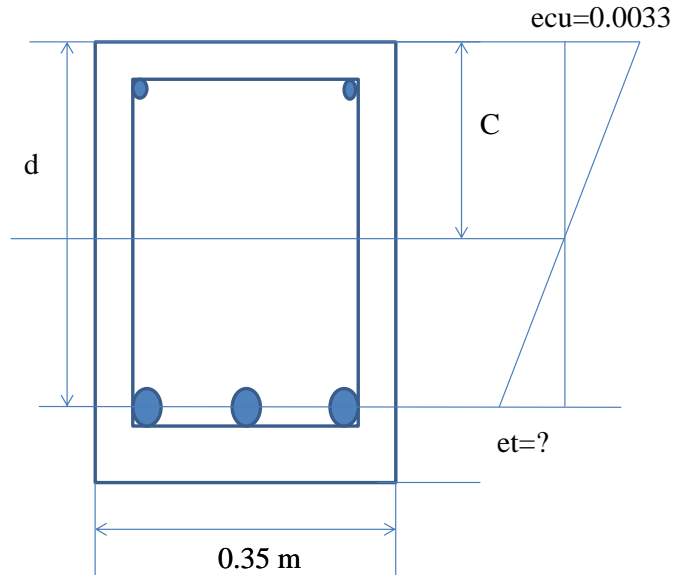


Figura 3 - 29. Esquema de la sección con diagrama de deformación unitaria de la viga

Determinado “a” se determina el valor de “c” (empleando B1), que es: 12.1 cm. Por relación de triángulos la deformación unitaria del acero (et) es:

$$\frac{d}{et + ecu} = \frac{c}{ecu} \Rightarrow et = 0.010$$

De esta forma queda dentro de la zona contralada por tensión, por lo que es correcto emplear 0.9 como factor de reducción de resistencia. Adicionalmente con el anterior análisis de compatibilidad de deformaciones es conveniente verificar la resistencia a flexión de dicha viga, considerando que debe existir equilibrio entre la fuerza de tensión y compresión.

3.4.1.4.2 Secciones doblemente armada a tracción y a compresión

En algunos casos, no se permite desde el punto de vista arquitectónico aumentar la altura de las vigas, cuando se necesita mejorar su resistencia a flexión. En estos casos se diseñan vigas doblemente armadas, que consiste en una sección simplemente armada más un refuerzo adicional a tensión y compresión (Ver Figura 3 - 30). Esta tiene la ventaja que reduce sus deflexiones a largo plazo y permite absorber momento por la inversión, que por ejemplo se produce en un evento sísmico.

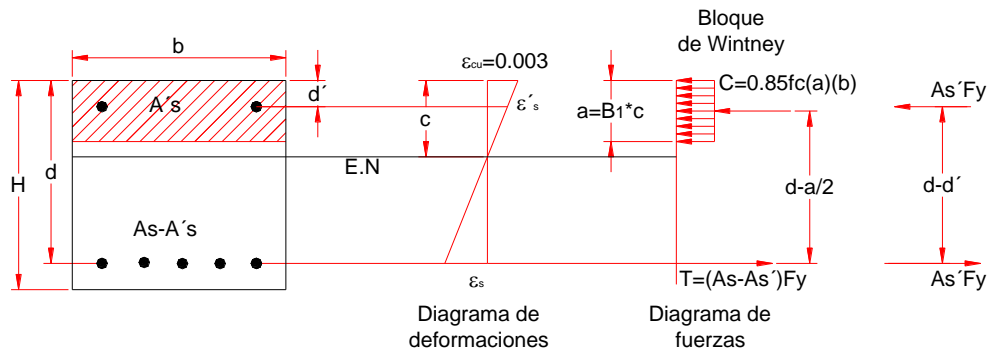


Figura 3 - 30. Diagrama de deformaciones y fuerzas para sección doblemente armada

El momento resistente de la sección en este caso es:

$$\phi Mn = \phi(Mn1 + Mn2) = \phi(As - A's)Fy(d - \frac{a}{2}) + \phi(A'sFy(d - d')) \quad (3 - 62)$$

Primero se determina el mayor aporte de la viga como si estuviera funcionando como simplemente armada, empleando la cuantía máxima. De esta forma el Mn1 asume esta parte de la resistencia, como se observa a continuación:

$$Mn1 = \rho_{\max} fy(1 - 0.59\rho_{\max} \frac{fy}{fc})bd^2 \quad (3 - 63)$$

Por otro lado, se debe tener en cuenta que el momento resistente debe ser mayor o igual al momento actuante, es decir:

$$\phi Mn = \phi(Mn1 + Mn2) \geq Mu \quad (3 - 64)$$

De esta forma se determina el momento que hace falta para resistir la totalidad del momento actuante (Mn2) y se calcula la cuantía necesaria a tracción y a compresión. Dicho momento es:

$$Mn2 = \frac{Mu}{\phi} - Mn1 \quad (3 - 65)$$

Como A's es:

$$As' = \frac{Mn2}{\phi fy(d - d')} \quad (3 - 66)$$

La totalidad del As es:

$$As = \rho_{\max} bd + \frac{Mn2}{\phi fy(d - d')} \quad (3 - 67)$$

Por último, se debe cumplir una **cuantía máxima** y mínima, para asegurar que tanto el refuerzo a tracción como el de compresión alcancen su límite en el instante de la falla (antes del concreto). Esto se logra con esta condición:

$$(\rho - \rho')_{\min} \leq (\rho - \rho') \leq (\rho - \rho')_{\max} \quad (3 - 68)$$

Donde:

$$(\rho - \rho')_{\max} = 0.75 \rho_b \quad (3 - 69)$$

Además, una **cuantía mínima de:**

$$(\rho - \rho')_{\min} = 0.85 * B_1 \frac{fc}{Fy} \frac{600}{600 - Fy} \frac{d'}{d} \quad (3 - 70)$$

Ejemplo 3 - 6: Realizar el diseño a flexión de la misma viga del ejercicio 2.1, pero cuando debe soportar un momento último de 470 KN.m. Inicialmente se averigua si funciona como una viga simplemente armada:

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53$$

$$R_n = \frac{470}{(0.35)(0.50)^2} = 5371.4 \frac{KN}{m}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mR_n}{\phi f_y}} \right] = \frac{1}{23.53} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(23.53)(5371.4)}{(0.9)(420000)}} \right] = 0.018 > \rho_{m\acute{a}xima}$$

Basados en lo anterior, la viga del presente ejercicio con esta sollicitaci3n no cumple para ser simplemente armada. Es necesario hacer el dise1o de una viga doblemente armada. Primero se determina el máximo aporte de la viga como si estuviera simplemente armada, empleando la cuantía máxima:

$$M_{n1} = \rho_{max} f_y (1 - 0.59 \rho_{max} \frac{f_y}{f_c}) b d^2$$

$$M_{n1} = 0.016064 * 420000 * (1 - 0.59 * 0.016064 * \frac{420}{21}) * 0.35 * 0.50^2 = 478.4 KN.m$$

Se determina el momento excedente, que tomaría el refuerzo en la zona a compresi3n:

$$M_{n2} = \frac{M_u}{\phi} - M_{n1} = \frac{470}{0.9} - 478.4 = 43.6 KN.m$$

Posteriormente se calcula la cuantía necesaria a tracci3n y a compresi3n:

$$A_s = \rho_{max} b d + \frac{M_{n2}}{\phi f_y (d - d')} = 0.016064 * 0.35 * 0.50 + \frac{(43.6)}{0.9 * 420000 * (0.5 - 0.05)} = 0.00306 m^2$$

Esto implica 6 varillas No. 8 en la parte inferior de la viga, proporcionando un área real en la zona a tracci3n de $A_s=30.6 \text{ cm}^2$. El rea en la zona a compresi3n es:

$$A_s' = \frac{M_{n2}}{\phi f_y (d - d')} = \frac{43.6}{0.9 * 420000 * (0.5 - 0.05)} = 0.00025 m^2$$

Esto implica 2 varillas No. 4, proporcionando un área real en la zona a compresi3n de $A_s=2.58 \text{ cm}^2$. Se debe cumplir una **cuantía máxima** y mínima, para asegurar que tanto el refuerzo a tracci3n como el de compresi3n fallen primero que el concreto en el instante de la falla. Para esto es necesario revisar la cuantía total:

$$(\rho - \rho') = \frac{(A_s - A_s')}{bd} = \frac{(30.6 - 2.58)}{35 * 50} = 0.01601 < (\rho - \rho')_{\max} = 0.75 \rho_b \text{ (OK)}$$

Otra forma de resolver el anterior problema es por medio de compatibilidad de deformaciones, que implican un proceso interactivo. Para ello se establece inicialmente un refuerzo a compresión de dos (2) varillas e No. 4. Posteriormente se empieza a variar el área de acero de la parte inferior de la viga, es decir la que está a tensión, partiendo del área relacionada con su cuantía máxima (28 cm²), hasta llegar a obtener el momento resistente igual al último actuante. En la Tabla 3 - 16 se presenta dicha evaluación.

fc	21 Mpa											
fy	420 Mpa											
b	0,35 m											
d	0,5 m											
Deformación de fluencia	0,00206											

				Deformaciones unitarias del acero							
Parte inferior	Parte superior			Parte inferior	Parte superior						
As (cm ²)	A's (cm ²)	a (m)	c (m)	et1	et2	T (KN)	Cct (KN)	Cc (KN)	Mn (KN.m)	Cuantía (As-A's)/(bd)	Cuantía máxima
28	2,6	0,171	0,201	0,0049	0,0025	1176	109,2	1066,8	442,3	0,014514286	0,01606
28,2	2,6	0,172	0,202	0,0048	0,0025	1184	109,2	1075,2	444,8	0,014628571	0,01606
28,4	2,6	0,173	0,204	0,0048	0,0025	1193	109,2	1083,6	447,3	0,014742857	0,01606
28,6	2,6	0,175	0,206	0,0047	0,0025	1201	109,2	1092	449,7	0,014857143	0,01606
28,8	2,6	0,176	0,207	0,0047	0,0025	1210	109,2	1100,4	452,2	0,014971429	0,01606
29	2,6	0,177	0,209	0,0046	0,0025	1218	109,2	1108,8	454,6	0,015085714	0,01606
29,2	2,6	0,179	0,210	0,0045	0,0025	1226	109,2	1117,2	457,1	0,0152	0,01606
29,4	2,6	0,180	0,212	0,0045	0,0025	1235	109,2	1125,6	459,5	0,015314286	0,01606
29,6	2,6	0,182	0,214	0,0044	0,0025	1243	109,2	1134	461,9	0,015428571	0,01606
29,8	2,6	0,183	0,215	0,0044	0,0025	1252	109,2	1142,4	464,3	0,015542857	0,01606
30	2,6	0,184	0,217	0,0043	0,0025	1260	109,2	1150,8	466,7	0,015657143	0,01606
30,2	2,6	0,186	0,218	0,0043	0,0025	1268	109,2	1159,2	469,1	0,015771429	0,01606
30,4	2,6	0,187	0,220	0,0042	0,0025	1277	109,2	1167,6	471,4	0,015885714	0,01606
30,6	2,6	0,188	0,221	0,0042	0,0026	1285	109,2	1176	473,8	0,016	0,01606
30,8	2,6	0,190	0,223	0,0041	0,0026	1294	109,2	1184,4	476,2	0,016114286	0,01606
31	2,6	0,191	0,225	0,0040	0,0026	1302	109,2	1192,8	478,5	0,016228571	0,01606
31,2	2,6	0,192	0,226	0,0040	0,0026	1310	109,2	1201,2	480,8	0,016342857	0,01606
31,4	2,6	0,194	0,228	0,0039	0,0026	1319	109,2	1209,6	483,2	0,016457143	0,01606

Tabla 3 - 16 Variación del área de acero a tensión y el momento resistente de una viga doblemente armada. Constante el acero a compresión.

De acuerdo con los cálculos anteriores, para un área en la parte inferior de la viga de 30.4 cm² y en la parte superior de 2,6 cm² se obtiene un momento último resistente de 471,4 KN.m, que es cercano al actuante de 470 KN.m. Para esta condición, se encontró que por equilibrio "a" tiene un valor de 0,187 m y "c" de 0,22 m. Que el acero que está en la zona de tensión y en la zona a compresión fluyen, es decir que sus deformaciones unitarias (0,0042 y 0,0025 respectivamente) son mayores a la deformación de fluencia que corresponden a 0,00206. Finalmente, la cuantía de la sección es de 0,016 que no sobrepasa la cuantía máxima. Con este análisis, se llegó a un resultado similar empleando el método anterior, con lo cual se confirma que es otro método adecuado. Adicionalmente se presenta a continuación un gráfico con la variación del momento resistente en función del área de acero que está en la zona a tensión.

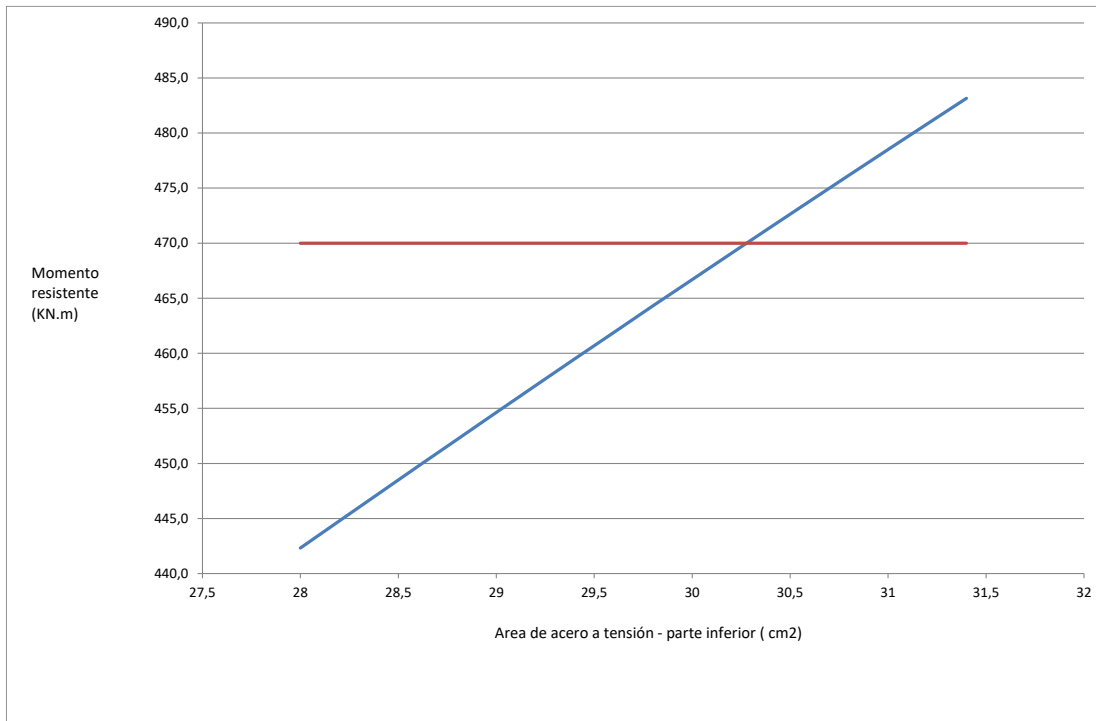


Figura 3 - 31. Gráfico de la variación del área de acero a tensión y el momento resistente de una viga doblemente armada. Constante el acero a compresión.

Por otro lado también se hizo un análisis variando el acero de compresión y dejando constante el acero a tensión, como se observa en la Tabla 3 - 17, encontrándose que es posible otra opción de diseño. Esta consiste en un área de acero abajo de 28 cm² y otra arriba de 10.6 cm², para lograr un momento último de 470.7 KN.m.

Para el diseño estructural de este tipo de elementos, es necesario determinar el ancho efectivo (be). Para vigas en forma “T”, dicho ancho efectivo, se determina seleccionando el menor valor de las siguientes condiciones:

- La separación entre centro de las vigas (S)
- La cuarta parte de la luz de la viga (L/4)
- $16t+b1$

Para vigas en forma de “L invertida”, este ancho se determina seleccionando el menor valor de las siguientes condiciones:

- La mitad de la separación entre centro de las vigas (S/2)
- La cuarta parte de la luz de la viga (L/12+b1)
- $6t+b1$

En el caso que la profundidad del bloque de compresiones y el eje neutro queden dentro de la aleta, como se observa en el literal (B) de la Figura 3 - 32, dicha viga trabaja como “rectangular” de dimensiones b y d (Para este caso referirse a vigas simplemente armadas). Cuando la profundidad del bloque de compresiones y el eje neutro queden por fuera de la aleta, como se observa en el literal (C) de la Figura 3 - 32, dicha viga trabaja como “T” y su momento resistente se evalúa de la siguiente forma:

$$Mn = Mn_{alma} + Mn_{aleta} \quad (3 - 71)$$

Para determinar el momento resistente último de la zona del alma:

$$Mn_{alma} = 0.85 f_c(a)(b1)(d - a/2) \quad (3 - 72)$$

$$Mn_{alma} = (As - As_{aleta})(d - a/2) \quad (3 - 73)$$

Para determinar el momento resistente último de la zona de la aleta:

$$Mn_{aleta} = (As_{aleta})Fy(d - t/2) \quad (3 - 74)$$

$$Mn_{aleta} = 0.85 f_c(be - b1) * t * (d - t/2) \quad (3 - 75)$$

Igualando estas dos (2) ecuaciones se tienen:

$$A_{s_{aleta}} = \frac{0.85 f_c (b_e - b_1) * t}{f_y} \quad (3 - 76)$$

Con relación a la cuantía máxima las normas establecen:

$$\rho_{maxima} = 0.75(\rho_b + \rho_{aleta}) \quad (3 - 77)$$

La cuantía balanceada se presente en la ecuación (2-13) y la cuantía de acero de la aleta es:

$$\rho_{aleta} = \frac{A_{s_{aleta}}}{(b_1)(d)} \quad (3 - 78)$$

Ejemplo 3 - 7: Se tiene un entrepiso de viga y losa en concreto reforzado con una resistencia a la compresión de 21 MPa y un límite de fluencia del acero de 420 MPa. Son vigas que tienen una longitud de 12 metros y están separadas entre ejes 0.8 m. Realizar el diseño a flexión de esta viga, considerando que debe soportar un momento último de 450 KN.m. Las dimensiones de este entrepiso son las siguientes:

L	12 m
h	0.6 m
b	0.8 m
t	0.05 m
b1	0.3 m
d'	0.05 m
d	0.55 m
S	0.8 m

Primero se define el ancho efectivo (b_e), que se selecciona como el menor valor de las siguientes opciones:

Requisitos	be(m)
La separación entre centro de las vigas (S)	0.8
La cuarta parte de la luz de la viga (L/4)	3
16t+b1	1.1
Menor valor	0.8

Posteriormente se verifica la localización del bloque de compresiones y el eje neutro, para evaluar si trabaja como viga “T” o como viga “rectangular”. Se diseña como una viga con una sección (be)X(h).

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53 \qquad R_n = \frac{450}{(0.8)(0.55)^2} = 1859.5 \frac{KN}{m}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mR_n}{\phi f_y}} \right] = \frac{1}{23.53} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(23.53)(1859.5)}{(0.9)(420000)}} \right] = 0.00524093 < \rho_{m\acute{a}xima} (ok)$$

$$A_{s_{requerida}} = 0.00524093(80)(55) = 23.06 cm^2$$

$$a = \frac{A_s F_y}{0.85 f_c (b)} = \frac{23.06 * 4200}{0.85 * 210 * 80} = 6.78 cm > t \text{ (Viga T)}$$

Basados en los cálculos anteriores, el bloque de compresiones y el eje neutro quedan por debajo de la aleta a compresión, por lo que dicha viga trabaja como “T”. Igualando las ecuaciones (3 - 72) y (3 - 73) se tienen:

$$A_{s_{aleta}} = \frac{0.85 f_c (be - b1) * t}{f_y} = \frac{0.85(21000) * (0.8 - 0.3)0.05}{420000} = 0.00106756 m^2 (10.67 cm^2)$$

$$M_{n_{aleta}} = (A_{s_{aleta}}) F_y (d - t / 2) = (0.00106756) * 420000 * (0.55 - \frac{0.05}{2}) = 235.4 KN.m$$

Se calcula el (As-Asaleta)

$$M_{n_{alma}} = \frac{Mu}{\phi} - M_{n_{aleta}} = \frac{450}{0.9} - 235.4 = 264.6 KN.m$$

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53$$

$$Rn = \frac{264.6}{(0.3)(0.55)^2} = 2915.7 \frac{KN}{m}$$

$$\rho - \rho_{aleta} = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mRn}{\phi f_y}} \right] = \frac{1}{23.53} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(23.53)(2915.7)}{(0.9)(420000)}} \right] = 0.00857$$

$$A_s - A_{s_{aleta}} = 0.00857(30)(55) = 14.15 \text{ cm}^2$$

La cuantía total a tracción para este viga debe ser de 24.8 cm². Se debe cumplir con la cuantía máxima:

$$\rho_{aleta} = \frac{A_{s_{aleta}}}{(b_1)(d)} = \frac{10.67}{(30)(55)} = 0.006470$$

$$\rho_{actual} = \frac{23.52}{30 * 55} = 0.015 < \rho_{máxima}$$

Otra forma de resolver el anterior problema es por medio de compatibilidad de

$$\rho_{máxima} = 0.75(\rho_b + \rho_{aleta}) = 0.75(0.02114 + 0.06470) = 0.0207$$

deformaciones, que implican un proceso interactivo. Para ello se tienen las siguientes fuerzas a compresión (Cc1 y CC2) y Tensión (T) con la cual se debe cumplir equilibrio (Cc1+Cc2=T):

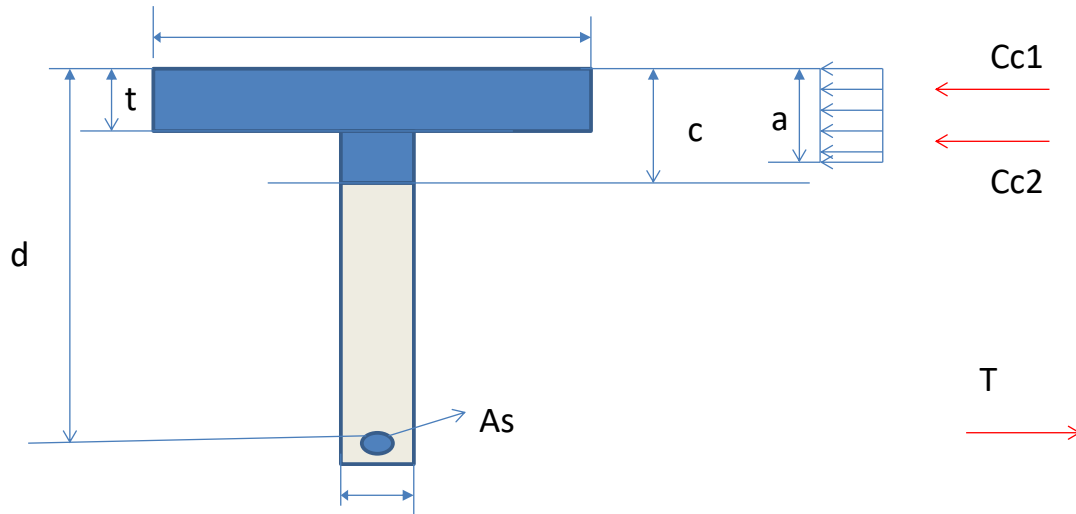


Figura 3 - 33. Fuerzas de tensión y compresión en viga “T”.

Para su solución de empieza a variar el área de acero de la parte inferior de la viga, es decir la que está a tensión, hasta llegar a obtener un momento resistente igual al último actuante. En la Tabla 3 - 18 se presentan los resultados de dicha evaluación, donde se varió el área de acero desde 20 a 25.6 cm².

Parte inferior			Parte inferior	Parte superior - aleta a compresión	Parte superior - alma a compresión		
As (cm ²)	a(m)	c(cm)	T(KN)	Cc1(KN)	Cc2(KN)	Mn (KN.m)	Cuantia máxima
20	0,074	0,087	840	714	126	384,4	0,0207
20,4	0,077	0,090	856,8	714	142,8	390,5	0,0207
20,8	0,080	0,094	873,6	714	159,6	396,5	0,0207
21,2	0,083	0,098	890,4	714	176,4	402,4	0,0207
21,6	0,086	0,101	907,2	714	193,2	408,3	0,0207
22	0,089	0,105	924	714	210	414,1	0,0207
22,4	0,092	0,109	940,8	714	226,8	419,8	0,0207
22,8	0,095	0,112	957,6	714	243,6	425,5	0,0207
23,2	0,099	0,116	974,4	714	260,4	431,2	0,0207
23,6	0,102	0,120	991,2	714	277,2	436,8	0,0207
24	0,105	0,123	1008	714	294	442,3	0,0207
24,4	0,108	0,127	1024,8	714	310,8	447,8	0,0207
24,8	0,11117647	0,13079585	1041,6	714	327,6	453,218076	0,0207
25,2	0,114	0,134	1058,4	714	344,4	458,6	0,0207
25,6	0,117	0,138	1075,2	714	361,2	463,9	0,0207

Tabla 3 - 18 Variación del área de acero a tensión momento resistente de una viga T.

De acuerdo con los cálculos anteriores, para un área en la parte inferior de 24,8 cm² se obtiene un momento último resistente de 453.2 KN.m, que es cercano al actuante (450 KN.m). Para esta condición, se encontró que por equilibrio “a” tiene un valor de 0,11 m y

“c” de 0,131 m, es decir que el eje neutro no esta en la aleta de la viga si no alcanza a quedar en parte del alma. Por otro lado que el acero de la zona de tensión fluye, porque su deformación unitaria es mayor a la deformación de fluencia que corresponden a 0,00206, por lo cual es correcto emplear para calcular la fuerza de tensión el límite de fluencia del acero. Los resultados empleando este método es

Finalmente se tendría una cuantía de 0,016 que no sobrepasa la cuantía máxima. Con este análisis se llegó a un resultado similar al anterior y confirma que es adecuado colocar 6 varillas No. 8 abajo y 2 No. 4 arriba. En la figura siguiente se presenta la variación del momento resistente en función del área de acero a tensión.

3.5.2 Cortante o tensión diagonal

Las fallas de los elementos de concreto reforzado por cortante son diferentes a las que se producen por flexión. Generalmente se diseñan elementos de concreto para que fallen primero a flexión y no a cortante, porque esta última es una falla frágil no conveniente. Se diseñan elementos a flexión para que resistan unas cargas externas considerables que son en la mayoría, menores a las que podrían producir o generar una falla típica de cortante.

Con relación a este tema, (E. Muñoz, 2011) ha investigado los daños típicos que tiene los puentes de la Red Vila Nacional. En ella se encontró basados en inspecciones visuales que algunos puentes de concreto reforzado o preesforzado presentan fisuras o grietas de cortante y que son en forma inclinada cerca de los apoyos en vigas simplemente apoyadas y que tienen un ángulo cercano a 45 grados (máximo cortante y mínimo momento. Algunas de estos tipos de grietas se presentan en las, Figura 3 - 34 y Figura 3 - 35 cuya causa principal está relacionada, entre otros aspectos, con: aumento de las cargas vivas que deben soportar, diseño estructural inadecuado y/o mala calidad del concreto. Adicionalmente en la Figura 3 - 36 se presenta un esquema de un puente simplemente apoyado y la forma y localización de las grietas no solamente a cortante, sino también a flexión y/o tensión.



Figura 3 - 34. Grieta a cortante en viga principal de concreto reforzado, con un espesor mayor de 0,6 mm. Fuente: (E. Muñoz, 2011)

Figura 3 - 35. . Grieta a cortante en viga principal de concreto reforzado. Espesor de la grieta mayor a 0,6 mm. Fuente(E. Muñoz, 2011)

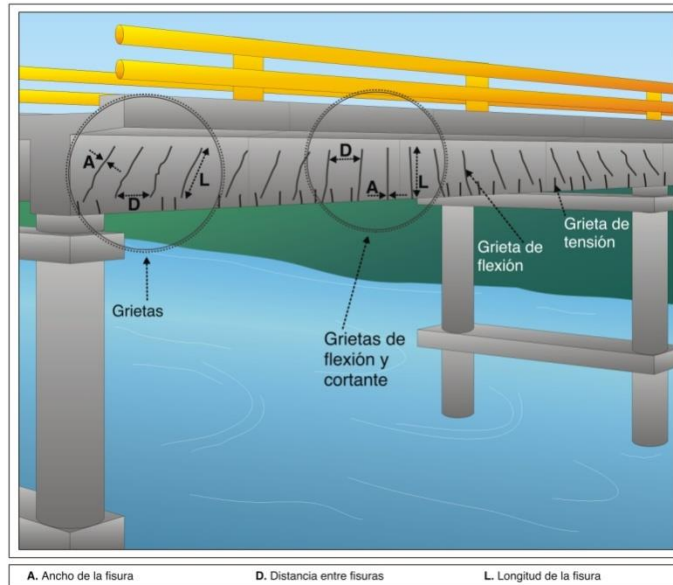


Figura 3 - 36. Esquema para identificación de grietas a flexión y cortante. Fuente: (E. Muñoz, 2011)

La capacidad resistente de un elemento en hormigón armado o concreto reforzado es suministrada por el concreto y el acero. El cortante nominal resistente se expresa de la siguiente forma:

$$\phi V_n = \phi (V_c + V_s) \quad (3 - 79)$$

Donde, ϕ es el factor de reducción de resistencia, que para la (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010) tiene un valor de 0,75, que es lo mismo para el ACI (Ver (McCormac & Russell,

2009)) V_c es la resistencia a cortante que proporciona el concreto y se define de la siguiente forma para vigas en términos de fuerzas:

$$V_c = 0.17\lambda\sqrt{f_c}(b)(d) = \lambda \frac{\sqrt{f_c}}{6}(b)(d) \quad (3 - 80)$$

En términos de esfuerzos se expresa de la siguiente forma:

$$(3 - 81)$$

$$V_{ce} = 0.17\lambda\sqrt{f_c} = \lambda \frac{\sqrt{f_c}}{6}$$

Donde λ depende del tipo de concreto. Cuando es concreto de peso normal se puede emplear 1.0 y si es de otro tipo (liviano) su magnitud es menor de 1.0 y varía entre 0,65 y 0,85 (Ver c.8.6 de la (INVIAS/AIS/NSR-10, 2010)). “ f_c ” es la resistencia a la compresión del concreto, b es el ancho del alma y d es la distancia efectiva entre la fibra extrema a compresión de acero al eje de las barras de acero que se encuentran en la zona de tensión.

El acero suministra resistencia a cortante de los elementos de concreto reforzado mediante flejes o estribos construidos en el alma de las vigas. En términos de fuerzas se define dicha resistencia de la siguiente forma:

$$V_s = \frac{A_v F_y d}{S} \quad (3 - 82)$$

Donde A_v es el área de las ramas de acero, F_y la resistencia del acero y S la separación de flejes. Dicha expresión también se puede expresar en términos de esfuerzos:

$$V_{se} = \frac{A_v F_y}{bS} \quad (3 - 83)$$

Ejemplo 3 - 8: Realizar el diseño a cortante la misma una viga rectangular del ejercicio 2.1, considerando que debe soportar un cortante última una distancia “ d ” del borde el muro

de 200 KN. Para ello, tener en cuenta que tiene una resistencia del concreto a la compresión de 21 MPa y un límite de fluencia del acero para los flejes de 420 MPa.

Para su solución se debe determinar inicialmente el esfuerzo medio actuante en la viga:

$$V_{ue} = \frac{V_u}{bd} = \frac{250}{0.35 * 0.50} = 1.428 \text{ Mpa}$$

Posteriormente se determina el aporte a nivel de resistencia del concreto y la parte que le corresponde al acero:

$$V_{se} = \frac{V_{ue}}{\phi} - V_{ce} = \frac{1.428}{0.75} - \frac{\sqrt{f_c}}{6} = 1.12 \text{ Mpa}$$

Se diseñan los flejes necesarios, para lo cual se considera:

- Que sean No. 3 (3/8) y de dos ramas.
- Con una resistencia del acero de 240 MPa

Para ello se despeja de la ecuación(3 - 83), la separación necesaria de los flejes:

$$S = \frac{A_v F_y}{b V_{se}} = \frac{2 * 0.71 * 2400}{35 * 11.2} = 8.7 \text{ cm}$$

Finalmente, el diseño quedó con flejes No. 3 separados 8.7 cm en la sección crítica. Posteriormente el diseñador debe revisar en la demás zona diferentes a la crítica cual es la separación de los flejes.

3.5.3 Torsión

3.5.3.1 Introducción

La torsión en elementos de concreto reforzado es un fenómeno estructural que se presenta cuando un miembro es sometido a un momento torsor alrededor de su eje longitudinal. Este tipo de sollicitación genera esfuerzos cortantes que producen tensiones diagonales en el concreto y esfuerzos de tracción en el acero de refuerzo, lo cual puede conducir a la formación de grietas inclinadas y, eventualmente, a la falla del elemento si no se dispone el refuerzo adecuado.

Las normas **ACI 318-19** y la **NSR-10** establecen criterios para evaluar cuándo la torsión debe considerarse en el diseño estructural y cómo debe proporcionarse el refuerzo necesario para resistirla. En general, la torsión se clasifica como **torsión de equilibrio** o **torsión de compatibilidad**. La primera debe ser resistida obligatoriamente por el elemento porque es necesaria para mantener el equilibrio de la estructura, mientras que la segunda puede redistribuirse hacia otros elementos estructurales si la configuración del sistema lo permite.

Esta instrucción establece los criterios para **evaluar, diseñar y detallar la resistencia a torsión en elementos de concreto reforzado**, tales como vigas, vigas de borde, vigas de transferencia y elementos sometidos a torsión debido a cargas excéntricas o compatibilidad estructural.

Cuando la torsión es significativa, ambas normas establecen que la resistencia del elemento se garantiza mediante la combinación de **estribos cerrados (refuerzo transversal)** y **refuerzo longitudinal**, formando un sistema resistente similar a una celosía espacial. Este modelo permite transferir los esfuerzos torsionales a través de bielas de compresión en el concreto y tirantes de acero en el refuerzo.

En consecuencia, el diseño a torsión en concreto reforzado requiere verificar la resistencia nominal del elemento, controlar la formación y propagación de fisuras, y asegurar una adecuada disposición del refuerzo transversal y longitudinal, siguiendo las disposiciones establecidas en **ACI 318-19 Capítulo 22** y en la **NSR-10 Título C**, que adopta en gran medida los criterios del ACI para el diseño de elementos de concreto estructural.

De acuerdo con ACI 318-19 y NSR-10, la torsión en elementos estructurales puede clasificarse en:

- **Torsión de equilibrio:**
Es necesaria para mantener el equilibrio del sistema estructural. En este caso **debe diseñarse explícitamente la resistencia a torsión.**
- **Torsión por compatibilidad:**
Surge por restricciones de deformación en el sistema estructural. Puede reducirse

mediante redistribución de esfuerzos o considerarse parcialmente si el análisis estructural lo permite.

Antes de diseñar el refuerzo de torsión se debe verificar si el momento torsor factorizado es mayor que el umbral de diseño.

$$T_u \leq \phi T_{th} \quad (3 - 84)$$

Antes de diseñar el refuerzo de torsión se debe verificar si el momento torsor factorizado T_u es menor que el umbral de diseño. Si T_u es menor que ϕT_{th} , donde T_{th} es la torsión umbral definida en la norma, no es necesario diseñar refuerzo específico para torsión; sin embargo, el elemento debe contar con refuerzo transversal mínimo.

Cuando T_u supera ϕT_{th} se debe diseñar el elemento para torsión. La resistencia nominal se expresa como $T_n = T_c + T_s$, donde T_c es la contribución del concreto y T_s la contribución del refuerzo transversal y longitudinal. El comportamiento se modela mediante la analogía de celosía espacial, en la cual los estribos cerrados resisten esfuerzos diagonales y las barras longitudinales resisten los esfuerzos de tracción asociados a la torsión.

Estribos para torsión: deben utilizarse estribos cerrados con anclaje adecuado alrededor del perímetro del elemento. Su espaciamiento debe cumplir los límites establecidos por la norma y deben envolver todas las barras longitudinales externas. Refuerzo longitudinal: se requiere refuerzo longitudinal adicional distribuido alrededor del perímetro de la sección, especialmente cerca de las esquinas del elemento.

El diseño debe considerar la interacción entre cortante y torsión, ya que ambos generan esfuerzos diagonales en el concreto. Por lo tanto, el refuerzo transversal debe diseñarse para resistir simultáneamente los efectos de cortante y torsión.

Para garantizar el desempeño estructural se deben cumplir los siguientes criterios: uso de estribos completamente cerrados, anclaje adecuado del refuerzo longitudinal, distribución uniforme del refuerzo alrededor del perímetro y control del espaciamiento máximo de estribos para evitar fallas frágiles por torsión. ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19). Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10, Título C – Concreto estructural.

3.5.3.2 Ejemplo de aplicación

Diseñar la viga que soporta la pasarela peatonal que se observa en la figura:

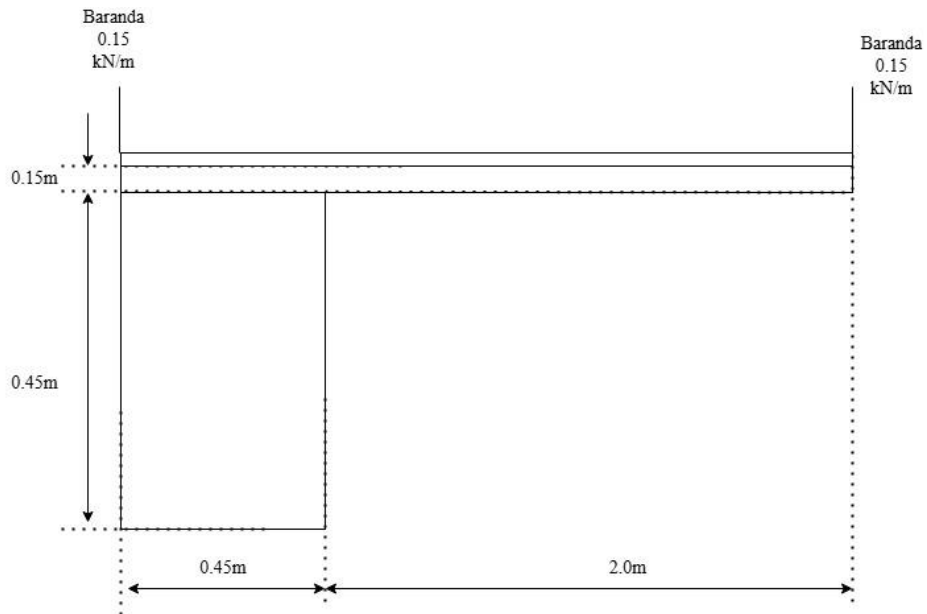


Figura 3 - 37. Pasarela peatonal de viga con losa en voladizo

3.5.3.1.1 Materiales

Con respecto a los materiales se tiene:

$$f_c := 28 \cdot \text{MPa}$$

$$f_y := 420 \cdot \text{MPa}$$

$$\gamma_{\text{concreto}} := 24 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{\text{mortero}} := 22 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

3.5.3.1.2 Evaluación de cargas

Carga muerta

$$b := 0.45 \cdot m$$

$$d' := 0.05 \cdot m$$

$$\phi := 0.75$$

$$Lviga := 6 \cdot m$$

$$h := 0.6 \cdot m$$

$$lvoladizo := 2 \cdot m$$

$$Wbaranda := 1.5 \frac{kN}{m}$$

Peso	Calculo
viga	$W_{cm1} := h \cdot b \cdot \gamma_{concreto} = 6.48 \frac{kN}{m}$
Acabado	$W_{cm2} := (b + lvoladizo) \cdot \gamma_{mortero} \cdot 0.05 \cdot m = 2.695 \frac{kN}{m}$
Barandas	$W_{cm3} := 2 \cdot Wbaranda = 3 \frac{kN}{m}$
Losa	$W_{cm4} := lvoladizo \cdot elosa \cdot \gamma_{concreto} = 7.2 \frac{kN}{m}$
Total	$W_{tcm} = 19.375 \frac{kN}{m}$

Carga viva

Por uso que es peatonal, esta carga es:

$$W_{cv} := 3 \cdot \frac{kN}{m^2}$$

$$W_{tcv} := (l_{voladizo} + b) \cdot W_{cv} = 7.35 \frac{kN}{m}$$

La carga última, empleando una de las combinaciones de carga es:

$$W_u := 1.2 \cdot W_{tcm} + 1.6 \cdot W_{tcv} = 35.01 \frac{kN}{m}$$

El momento máximo de la viga es:

El cortante máximo de la viga es:

Y la distancia $b_{soporte viga}/2 + d$ es:

$$b_{vigasoporte} := 0.7 \cdot m$$

$$V_{ud} := V_u \cdot \frac{(0.5 \cdot L_{viga} - (d + b_{vigasoporte} \cdot 0.5))}{(0.5 \cdot L_{viga})} = 73.521 \text{ kN}$$

La carga muerta por torsión sobre la viga es:

Peso	Calculo
Acabado	$T_{cm3} := (l_{voladizo}) \cdot e_{acabado} \cdot \gamma_{mortero} \cdot \left(\frac{l_{voladizo}}{2} + \frac{b}{2} \right) \cdot L_{viga} = 16.17 \text{ kN}\cdot\text{m}$
Barandas	$T_{cm2} := W_{baranda} \cdot \left(l_{voladizo} + \frac{b}{2} \right) \cdot L_{viga} = 20.025 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Losa

$$T_{cm1} := (l_{voladizo}) \cdot e_{losa} \cdot \gamma_{concreto} \cdot \left(\frac{l_{voladizo}}{2} + \frac{b}{2} \right) \cdot L_{viga} = 52.92 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Total

$$T_{tcm} := T_{cm1} + T_{cm2} + T_{cm3} = 89.115 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Y la carga viva:

$$T_{tcv} := W_{cv} \cdot \left(\frac{l_{voladizo}}{2} + \frac{b}{2} \right) \cdot L_{viga} \cdot l_{voladizo} = 44.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

La carga última de torsión es:

$$T_u := 1.2 \cdot T_{tcm} + 1.6 \cdot T_{tcv} = 177.498 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$T_u := \frac{T_u}{2} = 88.749 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3.5.3.1.3 Diseño a flexión

$$d := h - d' = 0.55 \text{ m}$$

$$m := \frac{f_y}{0.85 \cdot f_c} = 17.647$$

$$R_n := \frac{M_{max}}{b \cdot (d^2)} = 1.157 \text{ MPa}$$

$$\rho := \left(\frac{1}{m} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m \cdot R_n}{0.9 \cdot f_y}} \right) = 0.003$$

$$\rho_{min} := 0.0033$$

$$A_s := \rho_{min} \cdot b \cdot d = 8.168 \text{ cm}^2$$

Sirven 3No.6

3.5.3.1.4 Diseño a Cortante

$$V_{ud} := V_u \cdot \frac{(0.5 \cdot L_{viga} - (d + b_{viga\ so\ porte} \cdot 0.5))}{(0.5 \cdot L_{viga})} = 73.521 \text{ kN}$$

$$V_s := \frac{V_u}{\phi} - 0.17 \cdot \sqrt{f_c \cdot \text{MPa}} \cdot b \cdot d = -82.6 \text{ kN}$$

$$A_s := 1.29 \cdot \text{cm}^2$$

$$A_v := 2 \cdot A_s = 2.58 \text{ cm}^2$$

$$S_{max1} := \frac{A_v \cdot \frac{f_y}{\text{MPa}}}{0.35 \cdot b} = 68.8 \text{ cm}$$

$$S_{max2} := \frac{d}{2} = 0.275 \text{ m}$$

3.5.3.1.4 Diseño a torsión

Se revisa si es necesario evaluar torsión:

$$T_u := 1.2 \cdot T_{tcm} + 1.6 \cdot T_{tcv} = 177.498 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$T_u := \frac{T_u}{2} = 88.749 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$A_{cp} := h \cdot b = 0.27 \text{ m}^2$$

$$P_{cp} := 2 \cdot h + 2 \cdot b = 2.1 \text{ m}$$

$$T_{ur} := \phi \cdot 0.083 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} \cdot \left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) = 11.435 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Como $T_u > T_{ur}$, es necesario evaluar torsión. Ahora se revisa si la sección transversal de la viga es apta para torsión, para lo cual se debe cumplir con esta expresión:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b \cdot (h - d')} \right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot Ph}{1.7 \cdot A_{oh}^2} \right)^2} \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b \cdot (h - d')} + 0.66 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} \right)$$

$$Ph := 2 \cdot (b - 2 \cdot d') + 2 \cdot (h - 2 \cdot d') = 1.7 \text{ m}$$

$$A_{oh} := (b - 2 \cdot d') \cdot (h - 2 \cdot d') = 0.175 \text{ m}^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b \cdot (h - d')} \right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot Ph}{1.7 \cdot A_{oh}^2} \right)^2} = 2.929 \text{ MPa}$$

$$V_c := 0.17 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} \cdot b \cdot (h - d') = 222.64 \text{ kN}$$

$$\phi \cdot \left(\frac{V_c}{b \cdot (h - d')} + 0.66 \cdot \sqrt{\frac{f_c}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} \right) = 3.294 \text{ MPa}$$

Al revisar la relación, esta se cumple, luego la sección es apta. Ahora se determinan el refuerzo necesario. Para ello se emplea la siguiente expresión:

$$T_n = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_t \cdot f_y \cdot \phi \cdot \cot(\theta)}{s} \leq \frac{T_u}{\phi}$$

$$A_o := 0.8 \cdot A_{oh} = 0.14 \text{ m}^2$$

$$A_t := A_s$$

$$s := \frac{2 \cdot A_o \cdot A_t \cdot f_y \cdot \phi \cdot \cot\left(45 \cdot \frac{3.1416}{180}\right) \cdot \phi}{T_u} = 9.615 \text{ cm}$$

Ese valor no debe exceder lo siguiente o 300 mm.

$$s_{max} := \frac{Ph}{8} = 21.25 \text{ cm}$$

La combinación del refuerzo a cortante más el de torsión

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2 A_t}{s}$$

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{0.000258}{0.275} + \frac{0.000258}{0.096} = 0.00363 \text{ m}^{-1}$$

$$s = \frac{0.000258}{0.00363} = 0.006 \cdot \text{m}$$

Debe cumplir con:

$$\frac{A_v + 2 A_t}{b \cdot s} \geq \frac{0.062 \cdot \sqrt{f_c}}{f_{yt}} \geq \frac{0.35}{f_{yt}}$$

$$\frac{A_v + 2 A_t}{b \cdot s} = 0.012$$

$$\frac{0.062 \cdot \sqrt{f_c \cdot \text{MPa}}}{f_y} = 7.811 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{0.35 \cdot \text{MPa}}{f_y} = 8.333 \cdot 10^{-4}$$

Revisando cumple.

Ahora se revisa el refuerzo longitudinal adicional. Para ello se debe determinar, utilizando la separación determinada solamente para torsión y no combinada:

$$A_l := \frac{A_t}{0.275 \cdot m} \cdot Ph \cdot \left(\frac{f_y}{f_y} \right) \cdot \cot \left(45 \cdot \frac{3.1416}{180} \right)^2 = 7.974 \text{ cm}^2$$

Este valor debe ser mayor al mínimo que es:

$$\frac{0.42 \cdot \sqrt{f_c \cdot \text{MPa}} \cdot A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{0.275 \cdot m} \right) \cdot Ph \cdot \frac{f_y}{f_y} = 6.313 \text{ cm}^2$$

Esta área necesaria se reparte abajo, medio y arriba en la viga sumada a la que se estableció por flexión.

3.6 COLUMNAS

.5.1 Definición y clasificación

Las columnas son elementos estructurales sometidos principalmente a carga axial de compresión o tensión combinada con flexión, que también deben soportar torsión y cortante. La diferencia principal de un muro y una columna es la proporción del largo (L_w) y ancho (t) de su sección transversal como se observa en la siguiente figura. Algunas referencias consideran un muro cuando la relación de sus dimensiones principales t y L_w es mayor o igual de 5.



Figura 3 - 38 . Edificio de concreto en construcción. Identificación de un muro y una columna. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

Las columnas se pueden clasificar por diferentes aspectos. Uno de ellos es basado en su comportamiento estructural. Pueden presentarse pedestales como los que se observan a continuación.

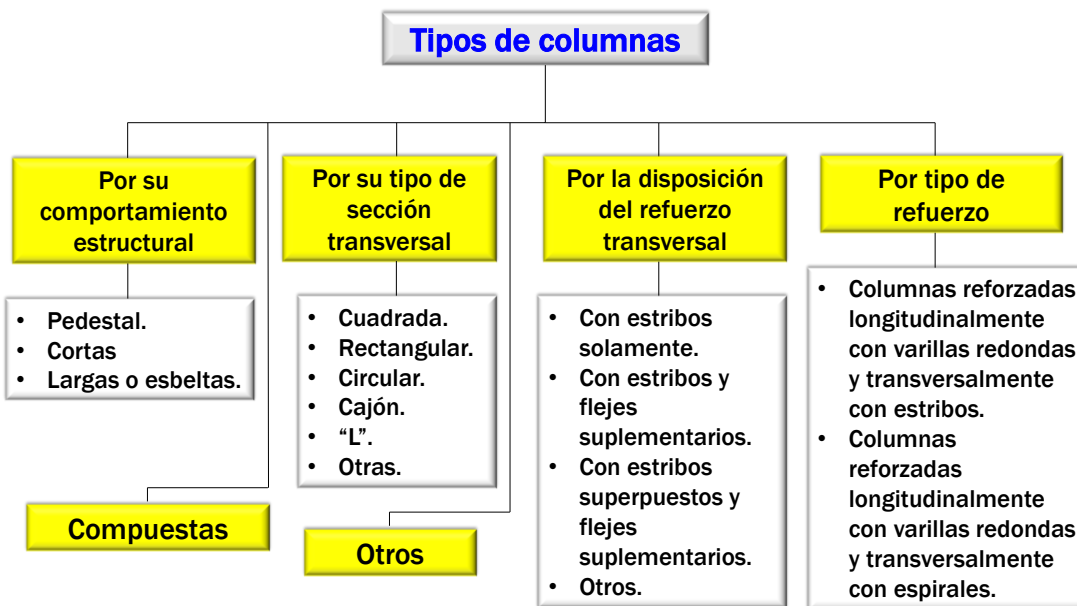


Figura 3 - 39 Organigrama con la clasificación de las columnas. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

a. **Por su comportamiento estructural.** Pueden ser:

1. **Pedestales:** Son elementos o bloques cortos a compresión. Son aquellos que tienen una altura vertical menor que tres veces su menor dimensión transversal. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se muestra un pedestal rectangular que ayuda como soporte de una pila de acero de un puente peatonal. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se muestra un pedestal circular que sirve de anclaje de un cable que soporta una cubierta.



Figura 3 - 40 Ejemplo de pedestal que soporta pila de acero de puentes peatonal. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)



Figura 3 - 41 Ejemplo de pedestal que sirve de anclaje de cable cubierta. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

2. **Cortas:** Es un miembro más bien robusto con poca flexibilidad. Es decir, con una relación de esbeltez baja. Entendiéndose relación de esbeltez a la relación que existe entre la longitud efectiva de la columna sobre su radio de giro.
3. **Largas o esbeltas:** Es un miembro con alta relación de esbeltez y flexibilidad. Generalmente, son aquellos elementos verticales en edificio de doble altura como se observa en la figura. Pueden hacer parte de dos o más pisos sin restricción lateral.

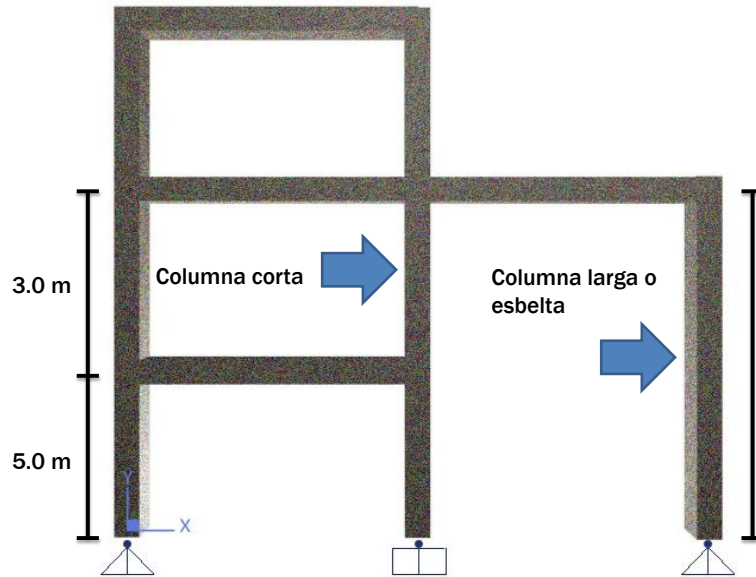


Figura 3 - 42 Identificación de una columna corta y otra esbelta en un pórtico plano. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

- b. **Por su tipo de sección transversal.** Pueden ser como las que se presentan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

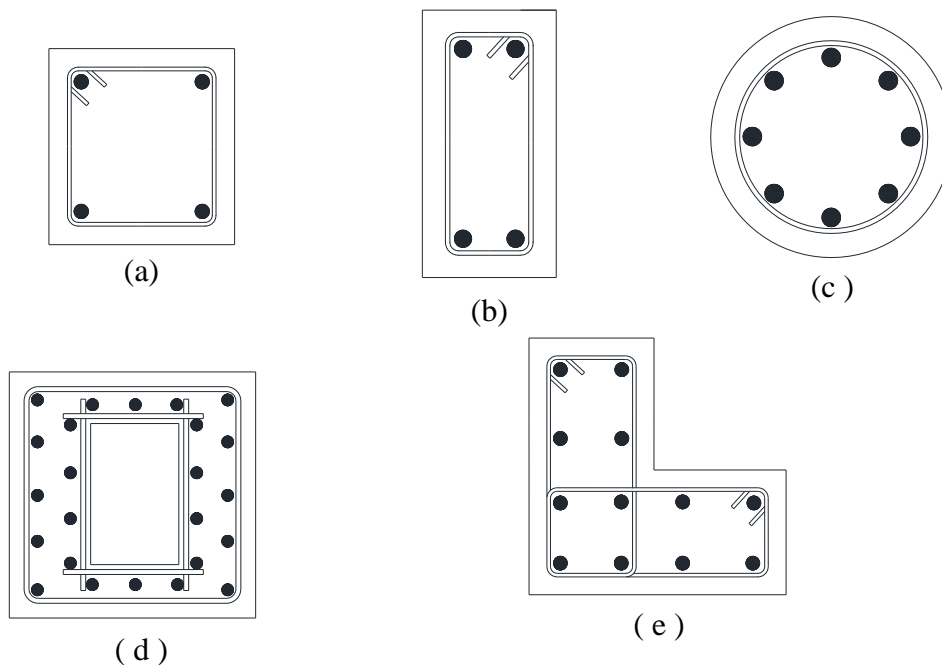
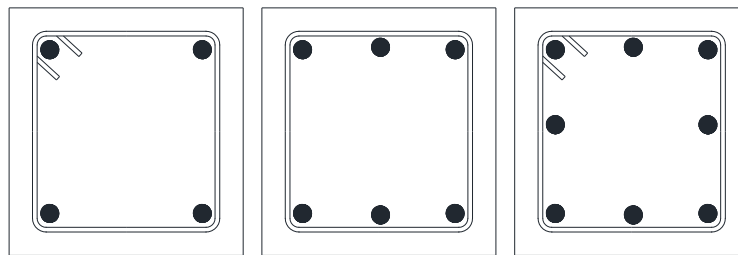
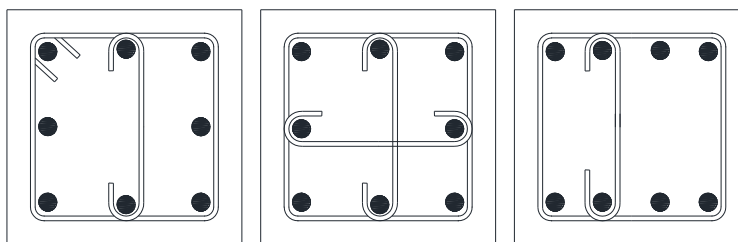


Figura 3 - 43 Algunos tipos de secciones transversales de columnas. (a) cuadrada. (b) rectangular. (c) Circular. (d) Cajón. (e). En "L". Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

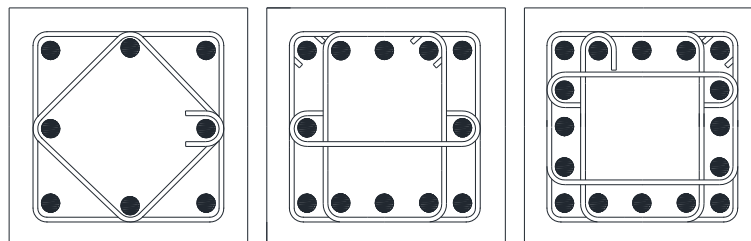
- c. **Por la disposición de su refuerzo transversal.** Pueden ser como las que se presentan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**



(a)



(b)



(c)

Figura 3 - 44 Algunos tipos de disposición de flejes en columnas. (a) Solamente estribos. (b) Estribos con flejes suplementarios (c) Estribos superpuestos con flejes suplementarios.

Fuente:(Sandra Suarez, 2010)

- d. **Por tipo de refuerzo.** Pueden ser como las que se presentan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

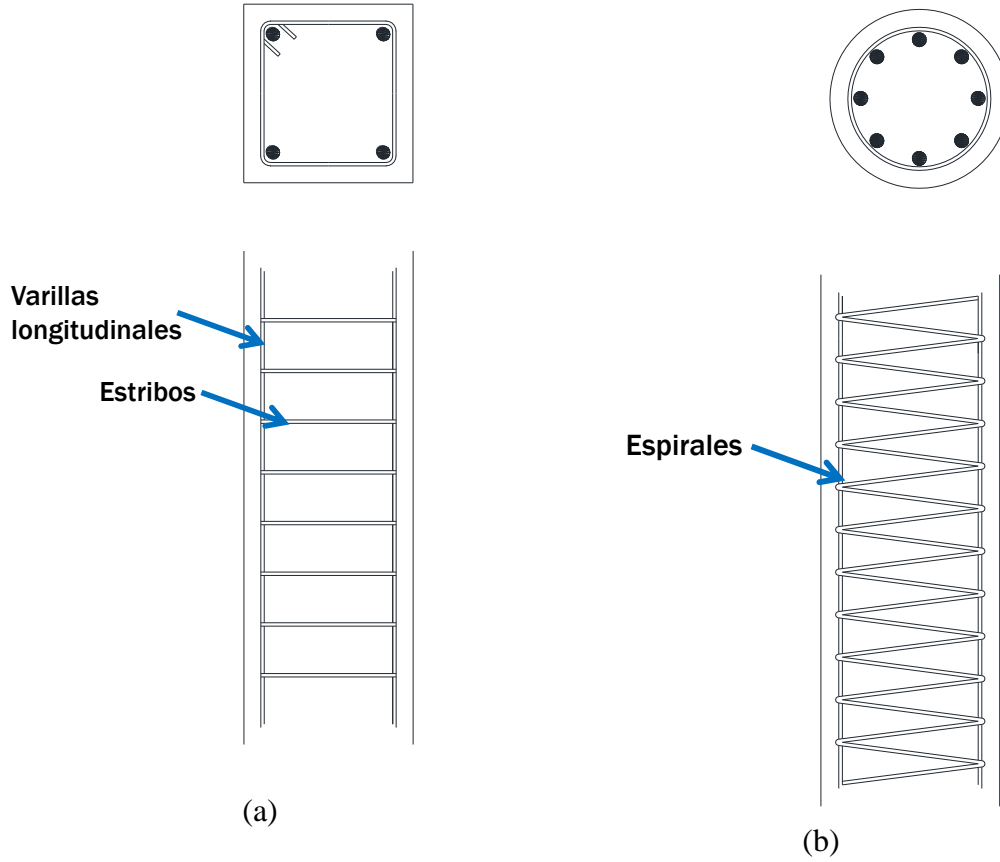


Figura 3 - 45 Algunos tipos de refuerzo en columnas. (a) Columnas reforzadas longitudinalmente con varillas redondas y transversalmente con estribos. (b) Columnas reforzadas longitudinalmente con varillas redondas y transversalmente con espirales. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

- e. **Compuestas.** Pueden ser como las que se presentan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**



Figura 3 - 46 Algunos tipos de columnas compuestas. (a) Columnas compuestas con perfiles de acero. (b) Columnas compuestas con tubos de acero. Fuente: (Sandra Suarez, 2010)

3.7 MUROS

Los muros son elementos estructurales que hacen parte también de algunos edificios de concreto reforzado y los hay de diferentes tipos; pueden ser muros de contención o muros cortina o de cortante que hacen parte de sistemas estructurales sismo resistente (dual o combinado). Se exponen a continuación parte de los fundamentos de este tipo de elemento, incluyendo algunos ejemplos de análisis y diseño basados en las especificaciones de la NSR-10 y diferentes referencias relacionadas que han estudiado o investigado sobre este tema, (García Reyes, 2014) entre otras).

En la figura siguiente se presenta una clasificación de los diferentes tipos de muros, que generalmente se diseñan y construyen en diferentes proyectos de ingeniería y posteriormente se presenta una definición de cada uno de ellos.

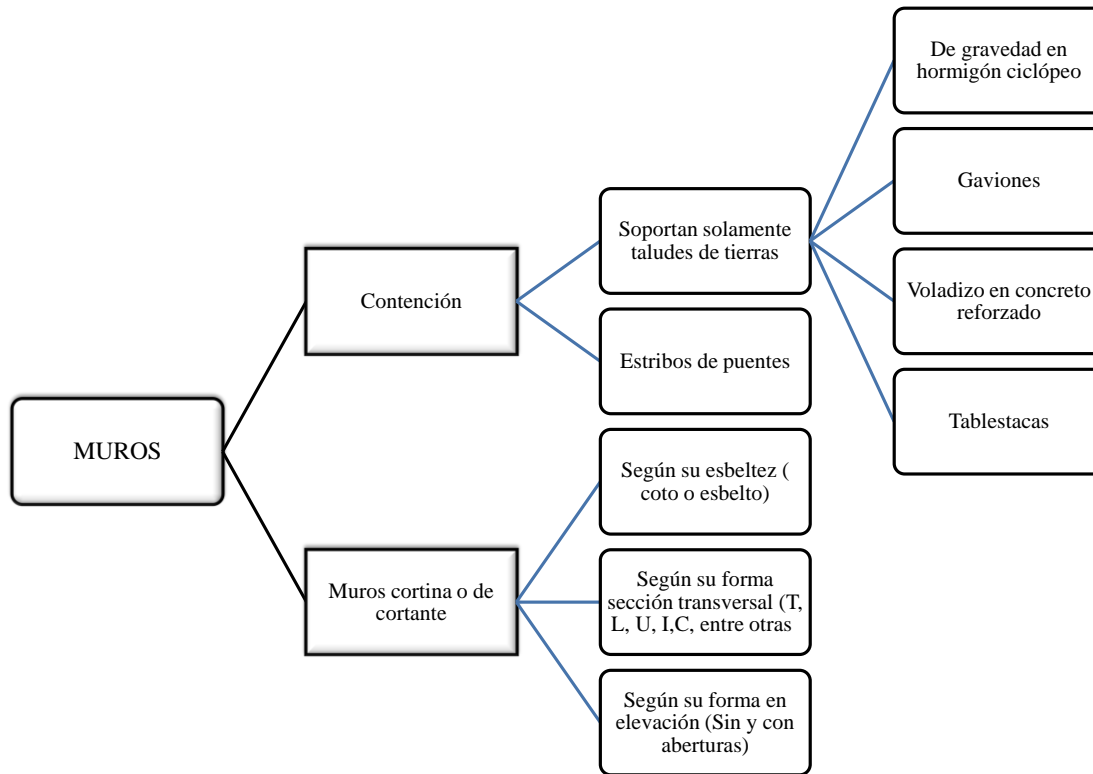


Figura 3 - 47. Clasificación de los muros. Fuente: Suarez,

3.7.1 Contención

Son estructuras concebidas para mantener y resistir en forma permanente los empujes horizontales de suelos estáticos y dinámicos (en cualquier lado) o hidrostático producto de los desniveles que son necesarios adecuar en diferentes tipos de obras o proyectos, tales como: taludes, estribos de puentes, tanques enterrados, pantallas de sótanos, etc. Deben ser concebidos y diseñados para garantizar: estabilidad, interacción suelo estructura, resistencia (flexión y cortante), durabilidad, entre otros.

Así mismo, también deben estar preparados para asumir su peso propio, el peso del suelo y otros tipos de cargas verticales que dependen del tipo de muro.

Para estos tipos de muros es importante también el manejo del drenaje del agua del suelo del relleno que contiene, de tal forma dicha agua sea evacuada para que no se generen mayores empujes horizontales de tierra sobre el mismo muro. Una de las formas de drenaje, es a través de la instalación en el muro de “lloraderos” mediante tupos de 4 pulgadas de diámetro o más, combinados con una membrana porosa(filtro) en la parte inferior del muro como se observa en la Figura 3 - 52. Esta instalación debe hacerse con mucho cuidado para evitar que los tubos se obstruyan, por lo cual debe estar acompañada con laboras de mantenimiento.

Estos tipos de muros se pueden clasificar en subgrupos, uno de ellos son aquellos que soportan solamente taludes de tierra, otros son los estribos de puentes y otros las tablestacas.

3.7.1.1 Muros para soportan solamente taludes de tierras.

Estos tipos de muro pueden ser de gravedad en hormigón ciclópeo como se presenta en la Figura 3 - 48, donde se especifican sus partes, tales como: pie, talón, corona y relleno.

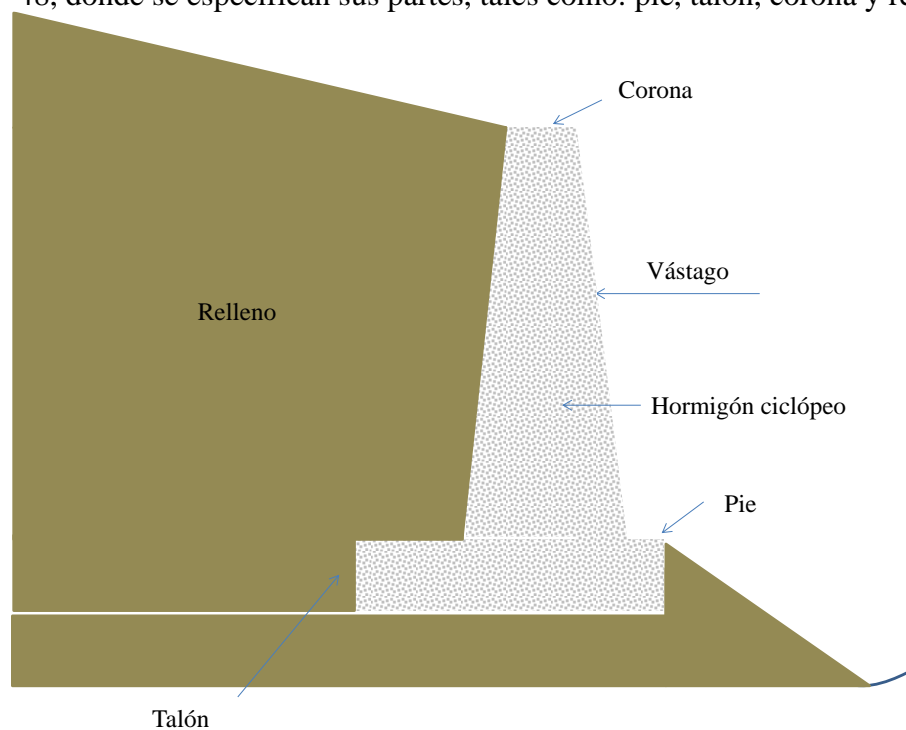


Figura 3 - 48 Muro de contención de gravedad en hormigón ciclópeo

Otros son de gaviones como se observan en las Figura 3 - 49 y Figura 3 - 50. Están compuestos por cajones de forma rectangular hechos en malla hexagonal, empleando alambre galvanizado y relleno con canto rodado. Su proceso constructivo se resume a continuación en la Figura 3 - 51.

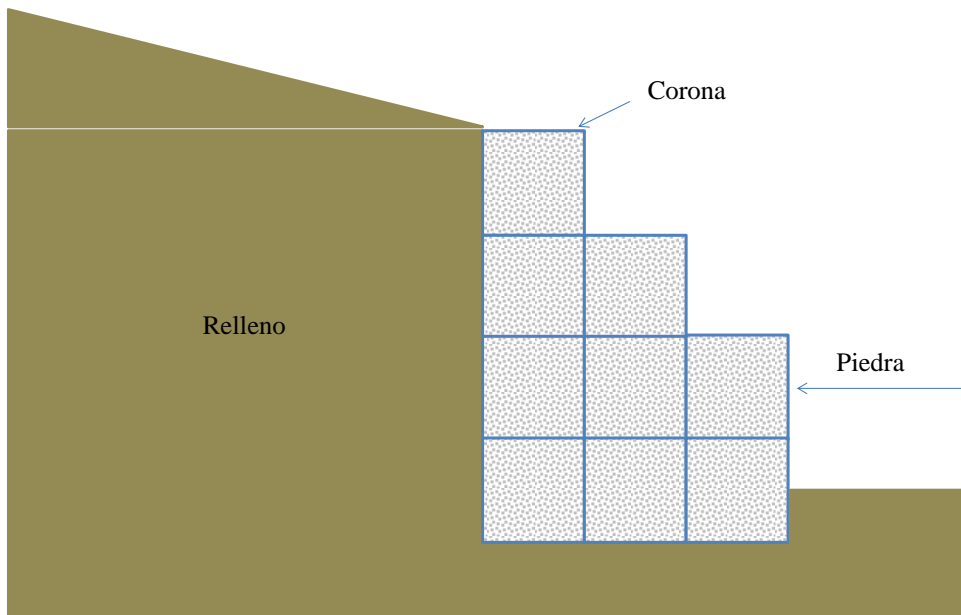


Figura 3 - 49 Muro de gravedad en gaviones



Figura 3 - 50. Gaviones para protección de aletas y estribo. Fuente:(E. Muñoz, 2011)



Figura 3 - 51. Proceso de armado del gavión de malla electrosoldada. Fuente: Adaptada de la referencia [Error! No se encuentra el origen de la referencia.] y presentan en [Error! No se encuentra el origen de la referencia.]

También hay muros en voladizo construido en concreto reforzado como se observa en la Figura 3 - 52, donde se identifican sus partes, tales como: zarpa delantera o pie, zarpa trasera o talón, vástago, corona, lloradores, relleno, entre otras.

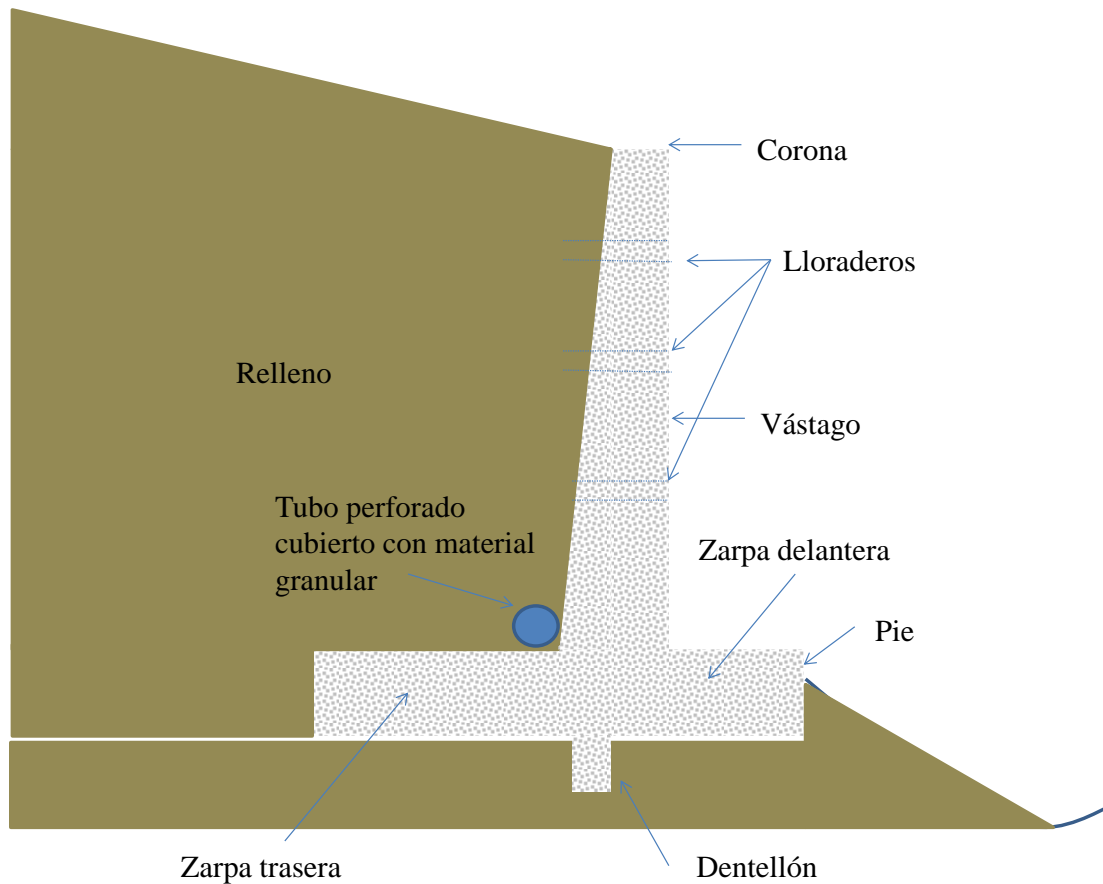


Figura 3 - 52 Muro en voladizo de concreto reforzado

Ejemplo 3.5

Como ejemplo de estos tipos de elementos estructurales, se presenta a continuación el diseño estructural de un muro en voladizo de concreto reforzado para que soporten el empuje horizontal que produce una altura de relleno de 3.50 metros (Ver Figura 3 - 53) . Para ello, se consideraron las siguientes variables:

- Resistencia a la compresión del concreto: 21 Mpa
- Límite de fluencia del acero: 420 Mpa
- Coeficiente de fricción entre el concreto y suelo(U) : 0.50
- Peso específico del relleno: 18 KN/m³
- Ángulo de fricción interna del suelo de relleno : 37 grados
- Capacidad portante del suelo: 80 KN/m².

En este ejercicio se hace el diseño teniendo en cuenta solamente el empuje de tierras estático (no dinámico) sin sobrecarga sobre el muro y basados en la revisión de los siguientes aspectos:

- Estabilidad

- Capacidad portante del suelo
- Resistencia a flexión y cortante

Un primer pre dimensionamiento de las dimensiones del muro son las siguientes:

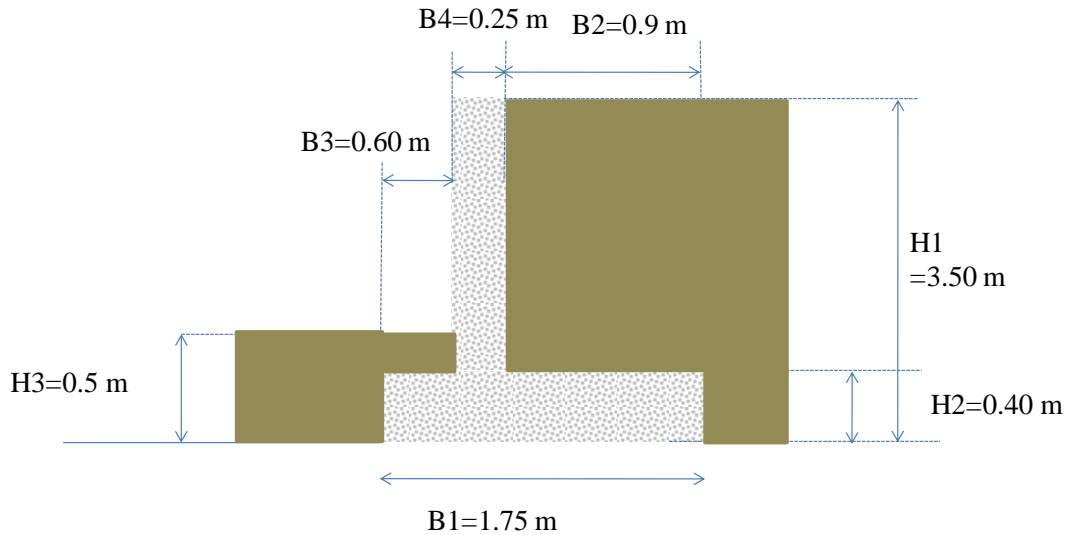


Figura 3 - 53. Esquema y dimensiones de muro en voladizo.

a. Evaluación de cargas.

Las fuerzas verticales y horizontales que actúan sobre el muro son las siguientes:

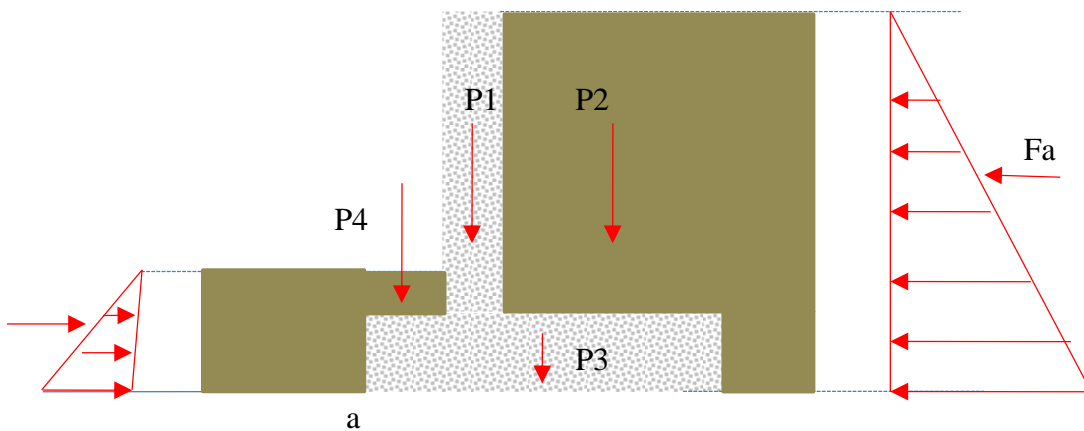


Figura 3 - 54. Cargas para el diseño del muro.

Los valores de las cargas verticales y los correspondientes momentos con respecto al punto de referencia “a”, que se presentan en la figura anterior son las siguientes:

	Fuerza(KN/m)	Brazo(m)	Momento(KN.m/m)
P1	18,60	0,73	13,49
P2	50,22	1,30	65,29
P3	16,80	0,88	14,70
P4	1,08	0,30	0,32
		Total	93,80

Tabla 3 - 19 Fuerzas y momento que ayudan a resistir el volcamiento

En la mecánica de suelos existen teorías para determinar los empujes producidos por el suelo sobre muros de contención y estribos, las cuales dependen directamente de las características mecánicas del relleno. La teoría de Rankine se usa fundamentalmente para suelos no cohesivos (arenas), la cual fue modificada y complementada por la teoría de Coulomb (1910) para tomar en cuenta los efectos de la cohesión y el talud de los rellenos inclinados. (Ver (Peck et al., 1974))

La teoría de Coulomb, deben tener en cuenta para su aplicación los siguientes aspectos:

- El suelo es isotrópico y homogéneo.
- El suelo posee ángulo de fricción interna y cohesión.
- Las fuerzas de fricción son distribuidas uniformemente a lo largo del plano de falla.
- La cara de falla es plana.

De esta forma el empuje de tierras estático y activo, considerando que el relleno es de tipo granular, es:

$$P_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a \quad (3 - 85)$$

El empuje de tierras estático y pasivo es

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p \quad (3 - 86)$$

El coeficiente activo (K_a) depende del ángulo de fricción interna del suelo (ϕ), que para un talud totalmente horizontal es:

$$K_a = \frac{1 - \text{sen}\phi}{1 + \text{sen}\phi} \quad (3 - 87)$$

Como el ángulo de fricción interna del relleno es de 37 grados centígrados, entonces:

$$K_a = \frac{1 - \text{sen}(37)}{1 + \text{sen}(37)} = 0,2486$$

El coeficiente pasivo (K_p) es el valor inverso del activo:

$$K_p = \frac{1}{K_a} = 4,022$$

El empuje activo por metro sobre el muro es:

$$P_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a = \frac{1}{2} (18)(3,5)^2 0,2486 = 27,41 \text{KN} / m$$

El momento que genera de volcamiento este empuje activo es:

$$M_A = 27,41(3,5/3) = 31,97 \text{KN.m} / m$$

El empuje pasivo por metro sobre el muro es:

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p = \frac{1}{2} (18)(0,5)^2 4,022 = 9,05 \text{KN} / m$$

El momento que produce el empuje pasivo que resiste el volcamiento es:

$$M_p = 9,05\left(\frac{0,5}{3}\right) = 1,51 \text{KN.m} / m$$

b. Revisión de estabilidad

Para la estabilidad de un muro se debe revisar volcamiento y deslizamiento. Para el volcamiento se debe cumplir con:

$$F.S_{volca\ min\ eto} = \frac{\sum MRV}{\sum MPV} \geq 2.0 \quad (3 - 88)$$

Donde:

$$\begin{array}{ll} \sum MRV & \text{Sumatoria de momentos que resisten volcamiento} \\ \sum MPV & \text{Sumatoria de momentos que producen volcamiento} \end{array}$$

Por lo tanto, considerando el momento por peso propio (suelo y concreto), el empuje activo y el pasivo sumando en el numerador de la ecuación (3 - 88) se tiene:

$$F.S_{volca\ min\ eto} = \frac{93,8 + 1,51}{31,97} = 2,98 \geq 2.0(OK)$$

Sin considerar el empuje pasivo, también se cumple con el factor de seguridad al volcamiento.

$$F.S_{volca\ min\ eto} = \frac{93,8}{31,97} = 2,93 \geq 2.0(OK)$$

Para el deslizamiento:

$$F.S_{deslizamiento} = \frac{\sum FRD}{\sum FPD} \geq 1.50 \quad (3 - 89)$$

Donde:

$$\begin{array}{ll} \sum FRD & \text{Sumatoria de fuerzas que resisten deslizamiento} \\ \sum FPD & \text{Sumatoria de fuerzas que producen deslizamiento} \end{array}$$

Por lo tanto, considerando el empuje pasivo:

$$F.S_{\text{deslizamiento}} = \frac{86,70 * 0.5 + 9.05}{(27,41)} = 1.91 \geq 1.50$$

Sin considerar el empuje pasivo

$$F.S_{\text{deslizamiento}} = \frac{86,70 * 0.5}{(27,41)} = 1,58 \geq 1.50$$

c. Revisión de la capacidad portante del suelo

Se determina a continuación los esfuerzos actuantes sobre el suelo, considerando que no hay empuje pasivo. Primero se halla la localización de la resultante (a):

$$a = \frac{\sum MRV - \sum MPV}{\sum C_{\text{vertical}}} = \frac{93.80 - 32.16}{86.70} = 0.71m$$

Como esta resultante queda dentro de los 2/3 de las zarpas del muro, la excentricidad (e) es:

$$e = \frac{1.75}{2} - a = 0.162m$$

El esfuerzo máximo es:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sum C_{\text{vertical}}}{1,75 * 1.0} \left(1 + \frac{6e}{1,75}\right) = 77.05KN / m^2 < \text{Capacidad}'_{\text{por tan te}}(OK)$$

El esfuerzo mínimo es:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sum C_{\text{vertical}}}{1,75 * 1.0} \left(1 - \frac{6e}{1,75}\right) = 22.03N / m^2 < \text{Capacidad}'_{\text{por tan te}}(OK)$$

d. Diseño estructural

El siguiente diseño estructural se realizó considerando que no hay empuje de tierras pasivo, lo cual es una condición crítica.

Zarpa trasera

Se determinan las fuerzas hacia abajo que corresponden al relleno y al peso propio de esta parte de concreto con sus correspondientes brazos hasta el punto “b” que se observa en la siguiente figura, con el propósito de determinar los momentos.

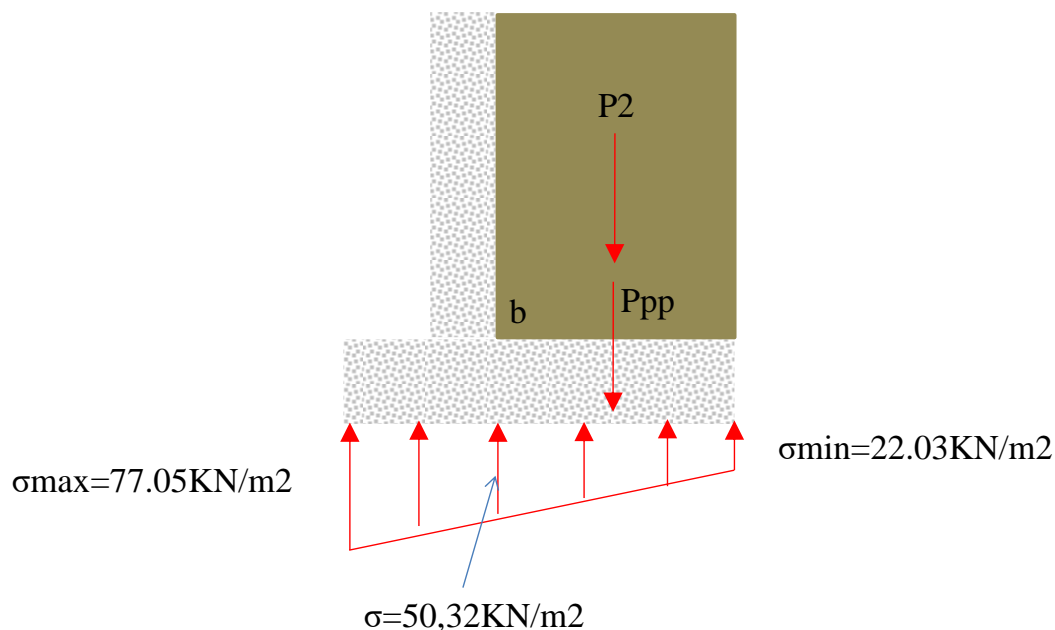


Figura 3 - 55. Cargas sobre la zarpa trasera

Se determinan también las fuerzas hacia arriba con sus correspondientes brazos que tienen que ver con la forma como reacciona el suelo para evaluar los momentos al punto “b”. En resumen se tiene:

	Fuerza(KN/m)	Brazo (m)	Momento (KN.m/m)
Reacción suelo (rectangulo)	19,83	0,45	8,92
Reacción suelo (triangulo)	12,73	0,30	3,82
Peso del relleno	-50,22	0,45	-22,60
Peso del concreto(pp)	-3,888	0,45	-1,75
	-21,55		-11,61

Tabla 3 - 20 Fuerzas y momento de la zarpa trasera

Se hace el diseño a flexión, para lo cual se considera un factor de mayoración de 1.7, con lo cual dicho elemento debe soportar un momento último de 19,72 KN.m/m. Se considera un d de 0.325m.

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53 \quad R_n = \frac{19,72}{(1.0)(0.325)^2} = 0.125 \text{MPa}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mk}{\phi f_y}} \right] = 0.00049 < \rho_{\min ma}$$

Para elementos horizontales de muros en voladizo la NSR-10 en el numeral C.14.3.3 es de 0.0025, se tiene (Otras normas emplean una cuantía mínima de 0.0020):

$$A_{s \text{ requerida}} = 0.0025(32.5)(100) = 8.125 \text{cm}^2 / m$$

Basados en lo anterior, se decide barras No. 4 cada 15 cm.

A nivel de cortante tiene un valor de 21.55 KN, que mayorado corresponde a: 36.6 KN. El esfuerzo actuante es menor que el esfuerzo resistente que lo proporciona solamente el concreto:

$$V_u = \frac{36.6}{0.325 * 1.0} = 0.11 \text{Mpa} \leq \phi V_c (\text{OK})$$

Zarpa delantera

Se determinan las fuerzas hacia abajo que corresponden al peso propio de esta parte de concreto con su correspondiente brazo hasta el punto “c” que se observa en la siguiente figura, con el propósito de determinar los momentos.

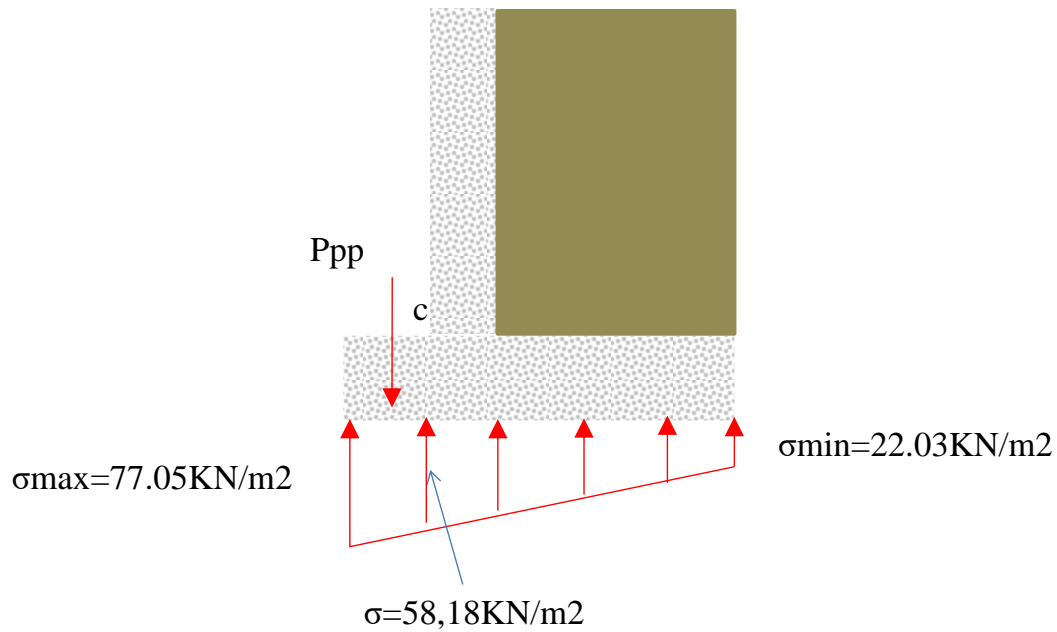


Figura 3 - 56. Cargas sobre la zarpa delantera

Se determinan también las fuerzas hacia arriba con sus correspondientes brazos que tienen que ver con la forma como reacciona el suelo para evaluar lo momentos al punto “c”. En resumen se tiene:

	Fuerza (KN/m)	Brazo(m)	Momento (KN.m/m)
Reacción suelo (rectangulo)	34.91	0.3	10.473
Reacción suelo(trinagulo)	5.66	0.4	2.264
Peso propio concreto (pp)	-5.76	0.3	-1.728
Peso propio suelo (pp)	-1.08	0.3	-0.324
	33.73		10.685

Tabla 3 - 21Fuerzas y momento de la zarpa delantera.

Se hace el diseño a flexión, para lo cual se considera un factor de mayoración de 1.7, con lo cual dicho elemento debe soportar un momento último de 18,16 KN.m/m. Se considera un “d” de 0.325m.

$$m = \frac{F_y}{0.85 f_c} = 23.53 \quad R_n = \frac{18.16}{(1.0)(0.325)^2} = 0.171 \text{MPa}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mk}{\phi f_y}} \right] = 0.00049 < \rho_{\text{min ma}}$$

Para elementos horizontales de muros en voladizo la NSR-10 en el numeral C.14.3.3 es de 0.0025, se tiene:

$$A_{s \text{ requerida}} = 0.0025(32.5)(100) = 8.125 \text{cm}^2 / m$$

Basados en lo anterior, se decide barras No. 4 cada 15 cm.

Basados en lo anterior, sirven barras No. 5 cada 18 cm. A nivel de cortante tiene un valor de 21.55 KN, que mayorado corresponde a: 36.6 KN. El esfuerzo actuante es menor que el esfuerzo resistente que lo proporciona solamente el concreto:

$$V_u = \frac{34.81}{0.325 * 1.0} = 0.18 \text{Mpa} \leq \phi V_c (\text{OK})$$

Vástago:

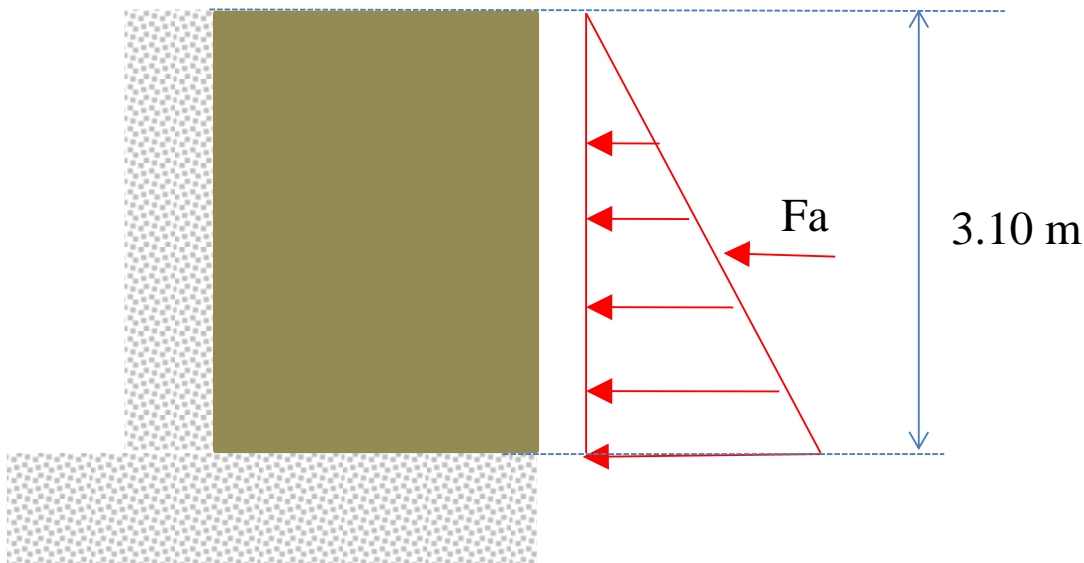


Figura 3 - 57. Cargas horizontales sobre vástago

El momento en la base del vástago es:

$$P_A = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a = \frac{1}{2} (18)(3.1)^2 0.2486 = 21.49 \text{ KN/m}$$

$$M_A = P_a (h/3) = 22.2 \text{ KN.m/m}$$

El momento último es de: 37.8 KN.m/m

$$Rn = \frac{37,8}{(1.0)(0.18)^2} = 1,16 \text{ MPa}$$

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2mk}{\phi f_y}} \right] = 0.0032 < \rho_{\min ma}$$

Para este elemento se debe emplear una cuantía mínima de 0,0033, por lo cual:

$$A_{s \text{ requerida}} = 0.0033(18)(100) = 10,7 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Basados en lo anterior, sirven barras No. 4 cada 21 cm en la zona de tensión. A nivel de cortante tiene un valor de $21.49 * 1.7 = 36.5 \text{ KN}$. El esfuerzo actuante es menor que el esfuerzo resistente que lo proporciona solamente el concreto.

e. Esquema de diseño

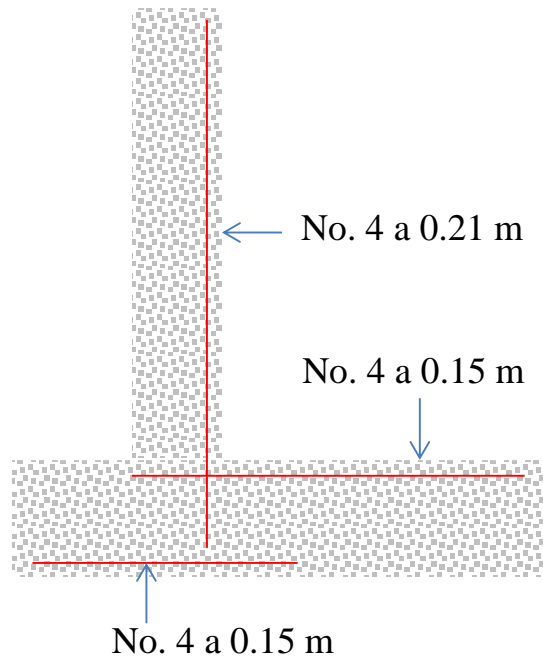


Figura 3 - 58. Refuerzo principal a flexión del muro en concreto reforzado en voladizo

3.7.1.2 Estribos

Son apoyos que soportan la carga vertical de la superestructura del puente en los extremos, además tienen la función de soportar, conjuntamente con las aletas y el terraplén de acceso, los empujes horizontales (estáticos y dinámicos) producidos por el suelo de relleno. Como se presenta en la Figura 3 - 59 son elementos estructurales constituidos generalmente por: vástago, zarpa delantera, zarpa trasera y diafragma. Pueden tener dentellón para mejorar su estabilidad ante el deslizamiento.

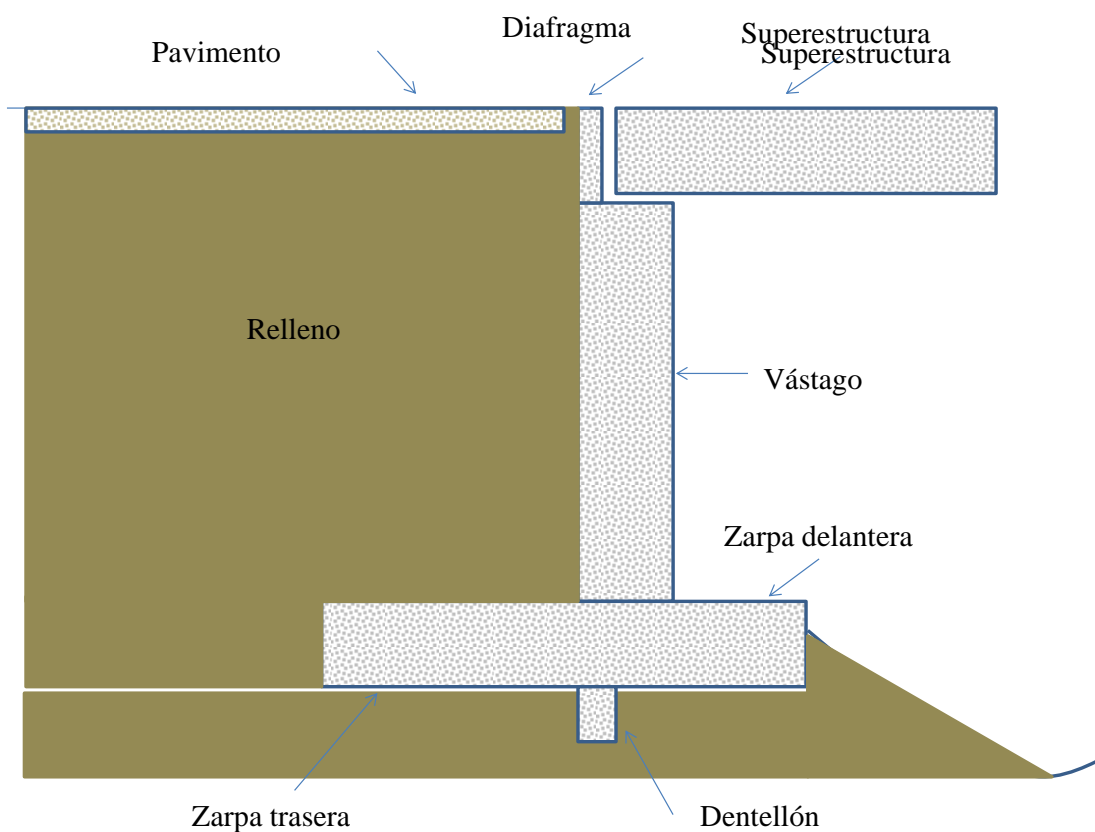


Figura 3 - 59 Partes básicas de un estribo

Las aletas son elementos estructurales que soportan el terraplén de acceso lateralmente y pueden ser construidas en forma monolítica o separada con los estribos (Ver (E. Muñoz, 2011)). Las cargas verticales sobre el estribo, son su propio, peso del relleno que se apoya en la zarpa trasera, peso de la losa de aproximación (si existe), carga muerta que proviene de la superestructura y carga viva. Todas estas cargas verticales colaboran con la estabilidad al volcamiento y al deslizamiento del estribo. Las cargas horizontales corresponden a empujes producidos por el suelo, las cuales dependen directamente de las características mecánicas del relleno. También deben soportar empujes horizontales producidos por el sismo, fuerzas inerciales inducidas por el sismo y las fuerzas sísmicas transmitidas por la superestructura a través de los apoyos (libre o restringido). Para determinar el efecto sísmico sobre el empuje de tierras, se utiliza el método de Mononobe-Okabe que fue desarrollado en 1920 y es una extensión de la teoría de deslizamiento de Culomb, que toma en cuenta las fuerzas inerciales horizontales y verticales actuando en el suelo. Los estribos y las aletas con cimentación superficial al estar sometidos a fuerzas horizontales tales como empujes de tierras y fuerzas sísmicas pueden sufrir deslizamiento y/o volcamiento, por lo que se deben diseñar y dimensionar de tal forma que cumplan con algunos requisitos de estabilidad. Sipucol clasifica este componente de la

siguiente forma: con aletas integradas, con aletas independientes, enterrado-sólido, enterrado – columnas-pilotes con viga cabezal y otro. A continuación, se presentan algunos esquemas y fotos de los tipos de estribos que tienen los puentes de la red vial nacional. Los estribos con aletas integradas son los que más se presentan, los cuales trabajan conjuntamente para soportar las cargas producidas por el terraplén de acceso. Otras son independientes o individuales y se identifican por la junta de construcción que tienen con el estribo como se observa en la (3 - 51). Existen otros tipos de estribos, los cuales son hechos de tierra armada, son sistemas en los cuales se utiliza materiales térreos como elementos de construcción.

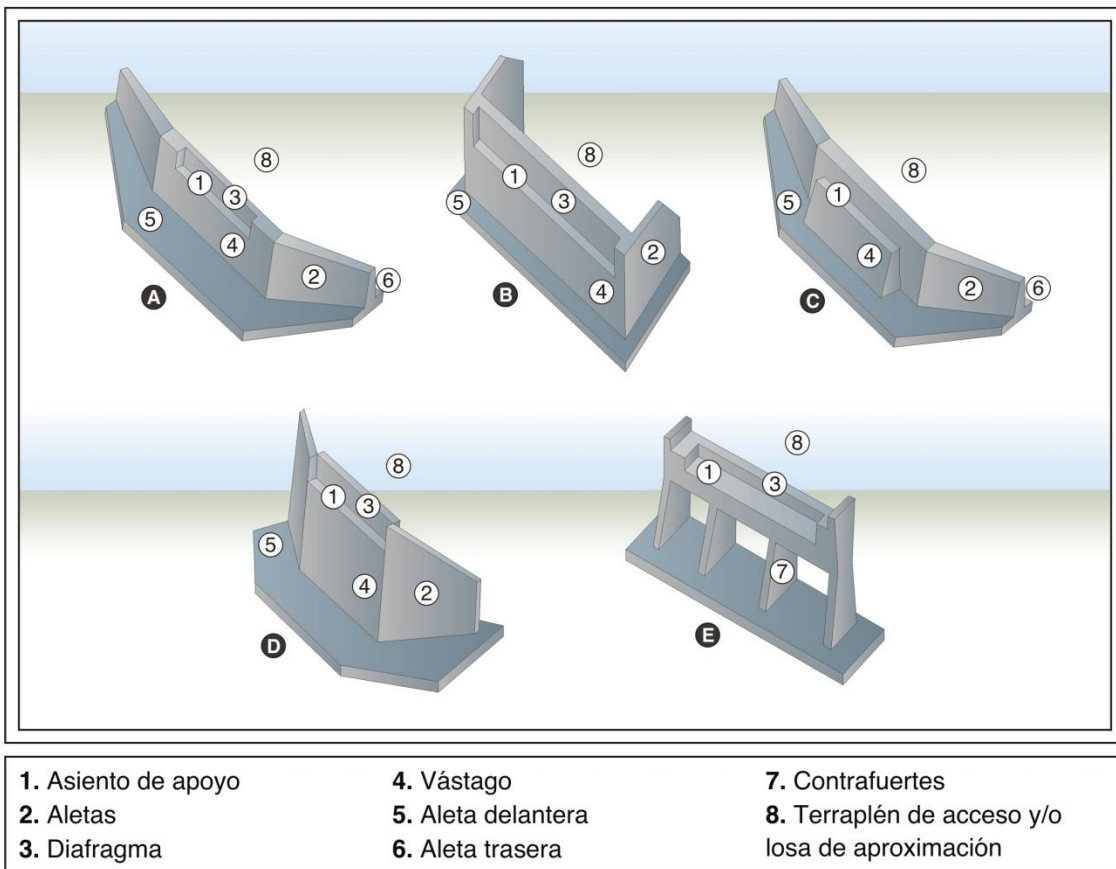


Figura 3 - 60 Tipos de estribos y partes básicas de un estribo con cimentación superficial. Adaptado de la referencia (Trujillo, 2000) y presente en la referencia (E. Muñoz, 2011)

En las siguientes figuras se presentan algunos ejemplos de tipos de estribos



Figura 3 - 61. Ejemplo de puente con estribo con aletas independientes. Regional Caquetá
Fuente: Propio



Figura 3 - 62. Estribo con aleta integrada.
Fuente: Propio

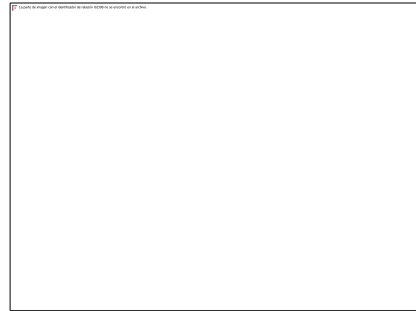


Figura 3 - 63. Estribo enterrado. Regional Chocó. Fuente: Propio

3.7.1.3 Pantalla o cortina

Son en concreto reforzado y se utilizan para soportar los empujes de tierra que se producen especialmente en los sótanos de los edificios. Estos empujes de tierra son variables y se producen en cada etapa de construcción de este tipo de obras, para lo cual es necesario revisar los procesos sucesivos de excavación definida por los ingenieros de suelos y de estructuras, quienes deben garantizar estabilidad y seguridad, hasta su finalización. Pueden ser construidos de diferentes tipos, apoyados en una viga de cimentación y en una losa de entrepiso, tales como:

- En concreto reforzado (Ver Figura 3 - 64)
- Mediante bloques de hormigón y columnas de concreto (Ver Figura 3 - 65)

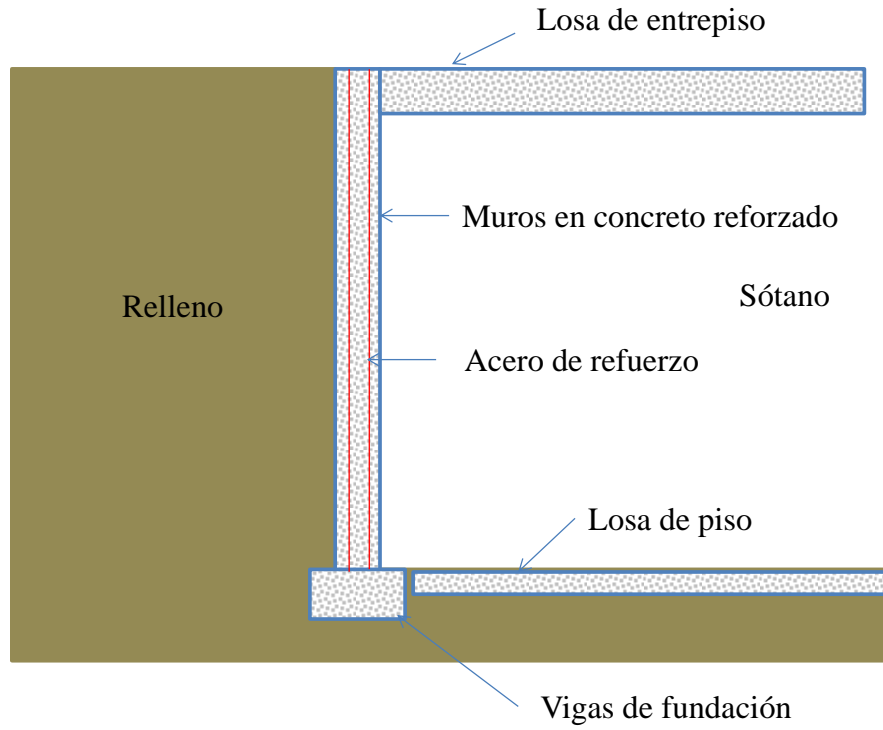


Figura 3 - 64 Esquema de una pantalla en concreto reforzado en un sótano

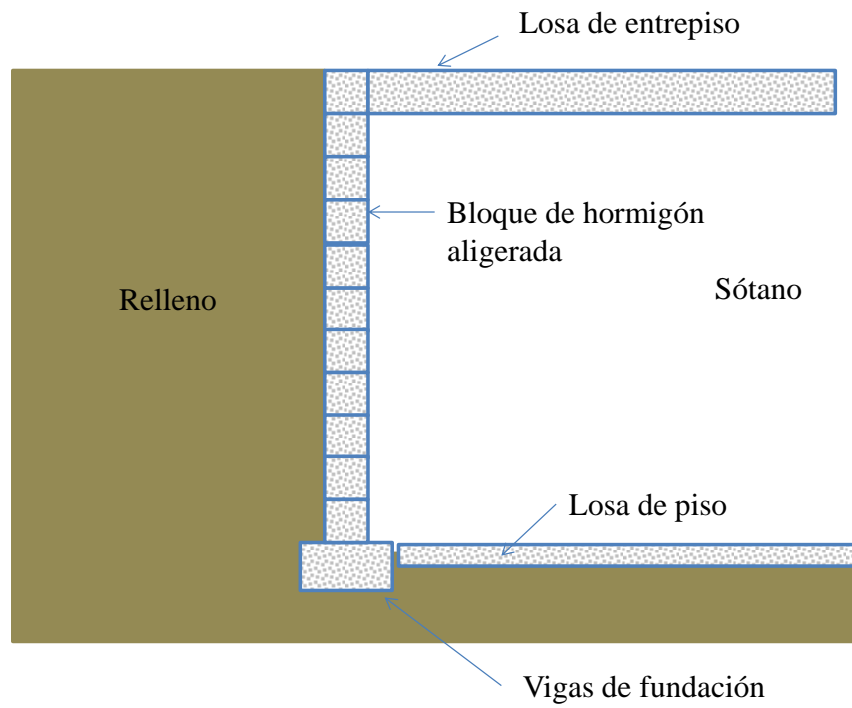


Figura 3 - 65 Esquema de una pantalla mediante bloques de anclaje en un sótano.

3.6.2 Muros cortina o de cortante

3.7.2.1 Definición

Para edificios medianos y altos es necesario un sistema estructural que permita una rigidez adecuada para resistir fuerzas laterales causadas por viento o sismo. Esto se puede lograr hacer mediante los muros cortina o de cortantes combinados con pórticos espaciales resistentes a momento sismos resistentes. Estos muros se pueden considerar como vigas verticales en voladizo que deben garantizar estabilidad lateral para soportar fuerzas cortantes y momentos más carga axial en sus planos. En la Figura 3 - 66 se presentan uno de estos muros en un edificio en proceso de construcción.



Figura 3 - 66 Muro cortina en edificio en construcción.

La diferencia entre un muro cortina o de cortante y una columna son diversas y dependen de las normas o inclusive de los autores especialistas en este tema. Algunos consideran que la diferencia se basa por la presencia de puntos de inflexión dentro del tramo del elemento vertical, es decir, quien tiene punto de inflexión es columna y quien no es un muro. La norma ACI – 318 diferencia estos dos tipos de elementos por su cuantía de acero vertical, ya que si es un elemento con una cuantía mayor o igual a 1% y tienen estribos o flejes para resistir el cortante corresponde a una columna, de lo contrario es un muro.

3.7.2.2 Clasificación de los muros cortina

Se clasifican basados en varios aspectos como se presentan en la Figura 3 - 47. Uno de ellos, es según su esbeltez, ya que pueden ser “esbeltos” cuando la relación entre su altura libre sobre el ancho es mayor a dos o “cortos” cuando la relación entre la altura libre sobre su ancho es menor de dos. Otro, es según la forma de su sección transversal, ya que pueden ser tipo: “T”, “L”, “C”, “I” u otros. Por otro lado, pueden presentarse muros con aberturas o sin aberturas, lo cual depende de diseño arquitectónico.

Por otro lado, (Garcia, 2008b), afirma que pueden clasificarse de acuerdo con su uso o comportamiento estructural. Uno de ellos son los muros de carga, que no disponen de un pórtico especial sismo resistente, si no son una estructura donde las cargas verticales y horizontales son resistidas por los muros (Ver Figura 3 - 67).

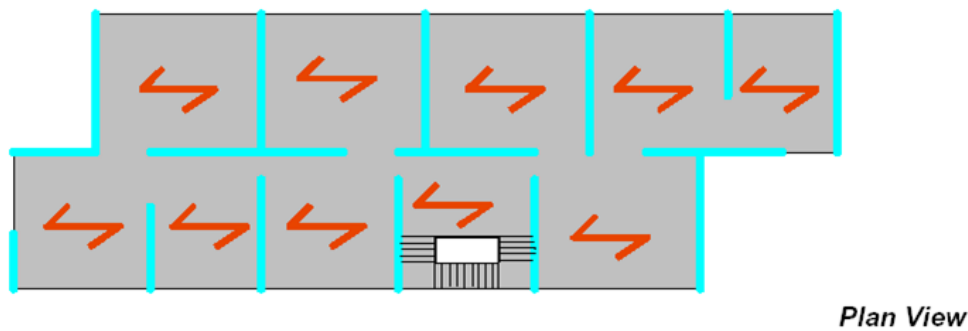


Figura 3 - 67 Sistemas de muros de carga. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

Otro son los sistemas compuestos por muros tipo cajón, como se observan en la siguiente figura:

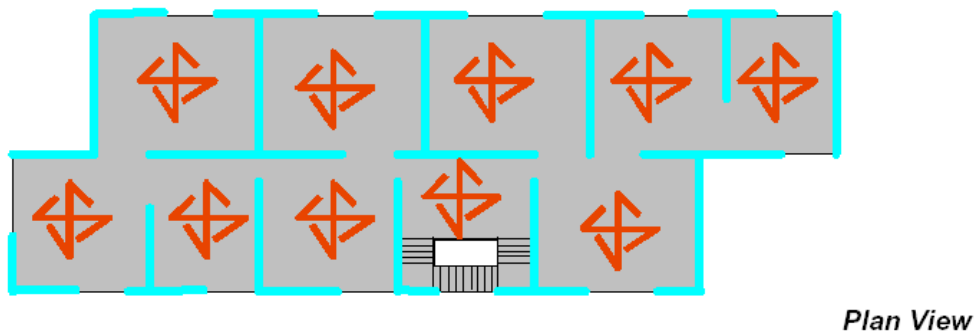


Figura 3 - 68 Sistema de muros tipo cajón. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

También se presentan los sistemas duales o combinados, los cuales dependen de la interacción de los muros con los pórticos espaciales sísmos resistentes, como se observan en la siguiente figura.

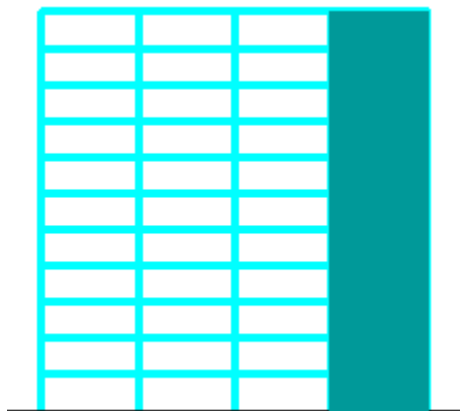


Figura 3 - 69 Sistema DUAL o COMBINADO. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

Un sistema estructural se considera DUAL, cuando se combina el portica espacial con muros cortina, pero con las siguientes condiciones:

- El pórtico espacial resistente a momento debe asumir o ser responsable de las cargas verticales.
- Las cargas horizontales son resistidas por la combinación de muros y los pórticos resistentes a momento.
- El pórtico especial resistente a momento del sistema estructural, actuando independientemente, debe resistir por lo menos el 25% del cortante sísmico en la base
- Los dos sistemas en conjunto deben resistir la totalidad del cortante sísmico, en proporción a su rigidez relativa, pero los muros resistentes a momento estructurales deben resistir al menor el 75% del cortante sísmico en la base.

También puede ser un sistema “COMBINADO”, para lo cual hay dos opciones, una consiste en que los pórticos espaciales resistentes a momento tomen las cargas verticales y los muros cortina o de cortante las cargas horizontales. Otra alternativa, es que tanto los muros como los pórticos espaciales tomen tanto las cargas verticales y horizontales, con la diferencia que no cumplan con las condiciones que se explicaron para el sistema DUAL.

También se presentan en la ingeniería sistemas estructurales en edificios de concreto reforzados, donde los muros cortina se conforman específicamente en el núcleo como se observa en las Figura 3 - 70 y Figura 3 - 71. Para este caso, dichos muros están cumpliendo las funciones de rigidez y resistencia, y al mismo tiempo están colaborando para conformar el sistema de ascensores combinado o no con la zona de escaleras.

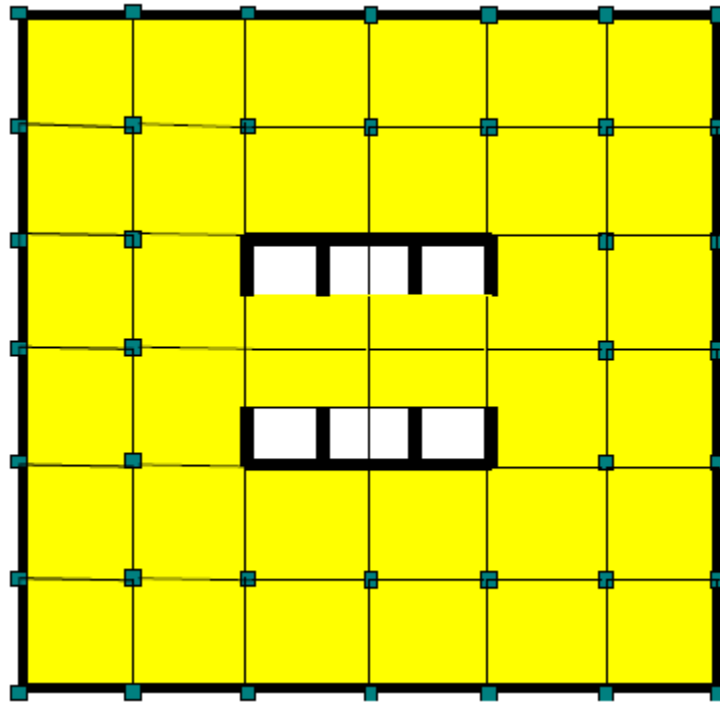


Figura 3 - 70 Sistemas estructurales basada en un sistema de núcleo. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

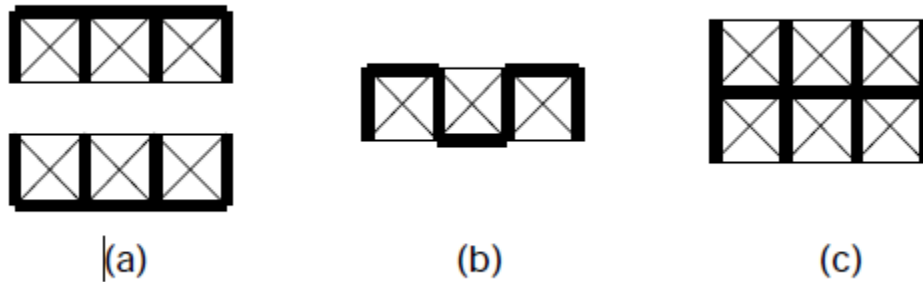


Figura 3 - 71 Alternativas de sistemas de núcleo. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

Otro sistema estructural con muros es el tipo túnel como se observa en la figura siguiente y que se hace mediante sistemas industrializados:

Tunnel Systems

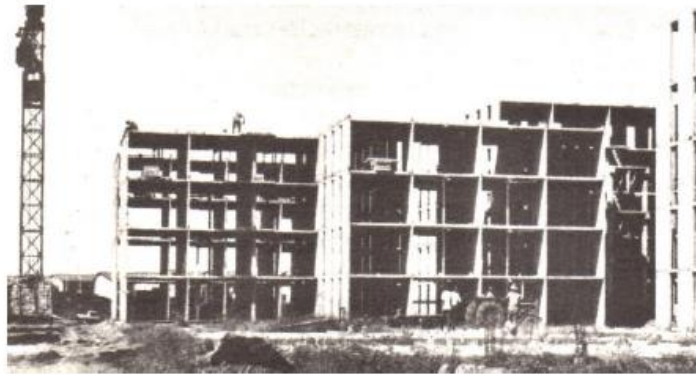
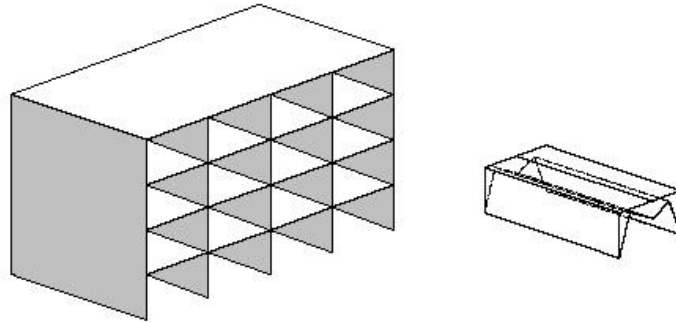


Figura 3 - 72 Sistema industrial tipo túnel. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

En sentido vertical existente los sistemas estructurales con muros acoplados, como se observa en la siguiente figura:

Coupled Walls

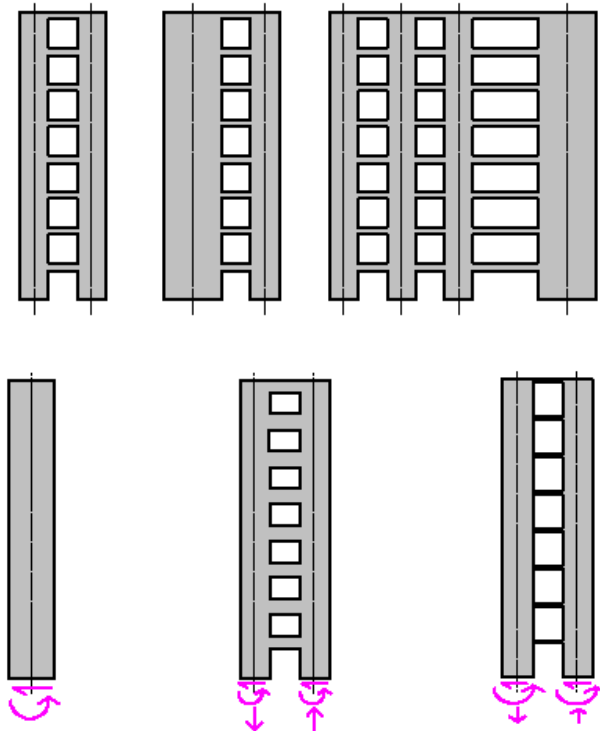


Figura 3 - 73 Sistema de muros acoplados. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

3.7.2.3 Aspectos principales para su análisis y diseño estructural

El tipo de sección, la geometría, el acero de refuerzo y las especificaciones de los materiales (acero y concreto) de los muros cortina o de cortante son definidas durante el análisis y el diseño estructural. Para ello, se parte del modelo estructural del esqueleto del edificio, donde se simula simultáneamente el comportamiento de las vigas, columnas y/o muros, con sus correspondientes propiedades, geometría y condiciones de frontera.

Para el diseño de un sistema de muros debe tenerse en cuenta la configuración del edificio en planta y en altura, el efecto de la forma de la sección, el tipo de cimentación, **el índice de muros**, entre otros.

Las solicitaciones internas de los muros provienen de las cargas que actúan sobre la estructura del edificio, tales como: sismo, viento, muerta, viva, entre otras. La magnitud de la carga muerta depende principalmente del tipo y espesor del entrepiso, como también de la fachada. La carga viva del uso de la estructura y la de sismo obedece a la zona de amenaza sísmica donde se va a diseñar y construir el edificio. Los muros deben diseñarse para soportar flexión y cortante en las dos direcciones y fuerza axial generalmente a compresión, como se observa en la Figura 3 - 74.

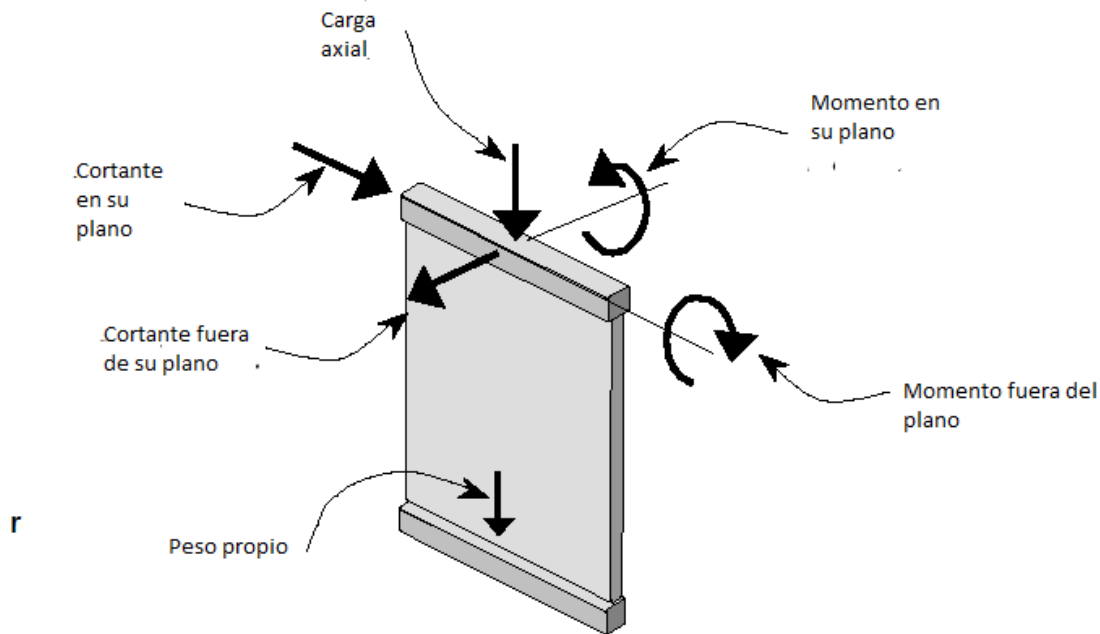


Figura 3 - 74 Cargas sobre un muro cortina. Fuente: Adaptado de (García, 2008b)

Para el análisis y diseño estructural de los muros, dichas condiciones de carga deben ser modificadas por las combinaciones de carga establecidas por la norma, como también del coeficiente de disipación de energía que depende del: tipo de estructura, irregularidades en planta, irregularidades en alzado y redundancia. Igualmente, los muros y los pórticos espaciales deben contribuir para cumplir con los siguientes requisitos en la estructura: Deriva, esbeltez local y esbeltez global.

3.7.2.3.1 Carga axial y flexión

Los muros deben diseñarse como columnas capaces de resistir cargas simultáneas axiales y de flexión en las dos direcciones. Para el diseño a flexo compresión la norma NSR-10 permite utilizar el “Método empírico” cuando se cumple con ciertas condiciones o mediante diagramas de interacción como se hace para el caso de diseño a flexo compresión de columnas.

3.7.2.3.1.1 Método empírico

Según el numeral C-14.5 de la NSR-10, se permite que los muros de sección transversal rectangular sin vacíos o macizo sean diseñados mediante unas consideraciones empíricas, cuando la resultante de las cargas mayorales este localizada dentro del tercio central del espesor total del muro y satisfagan los requisitos c.14.2 ,14.3 y c.14.5 de la NSR-10. Cuando

lo anterior se cumpla, la carga axial mayorada que actúa en el muro producto de las diferentes combinaciones de carga debe ser menor a:

$$\phi P_n = 0.55\phi f'_c A_g \left[1 - \left(\frac{kl_c}{32h} \right)^2 \right] \quad (3 - 90)$$

Dónde:

ϕ Es el factor de reducción de resistencia que depende de la sección controlado por compresión, de acuerdo con el numeral c.9.3.2.2 de la NSR-10. Por lo tanto, debe ser de 0.65 para los muros con estribos.

El factor k, depende del nivel de arriostramiento en sus extremos. El valor de este factor, para muros arriostrados en la parte superior e inferior con el fin de evitar el desplazamiento lateral y cumpliendo las siguientes condiciones, se tiene:

Restringidos contra la rotación en uno o en ambos extremos (superior o inferior o ambos)	0.80
No restringidos contra la rotación en ambos extremos	1.0
No arriostrados con el fin de evitar el desplazamiento lateral	2.0

3.7.2.3.1.2 Diagramas de interacción

Para determinar dicho refuerzo, se acostumbra a realizar inicialmente una evaluación uniaxial en cada dirección mediante la construcción de una carta de diseño. Esta carta contiene diferentes diagramas de interacción con cuantías reglamentadas por la norma para muros. Cada diagrama de interacción se construye basados en un análisis de compatibilidad de deformaciones de diferentes puntos, tales como: falla a compresión, falla a tensión, condición balanceada y puntos adicionales (ver ejemplo en Figura 3 - 75). Un buen diseño del refuerzo de este elemento garantiza fallas de rompimiento por tracción del acero, aplastamiento del concreto en la zona de compresión y pandeo lateral de la zona de compresión.

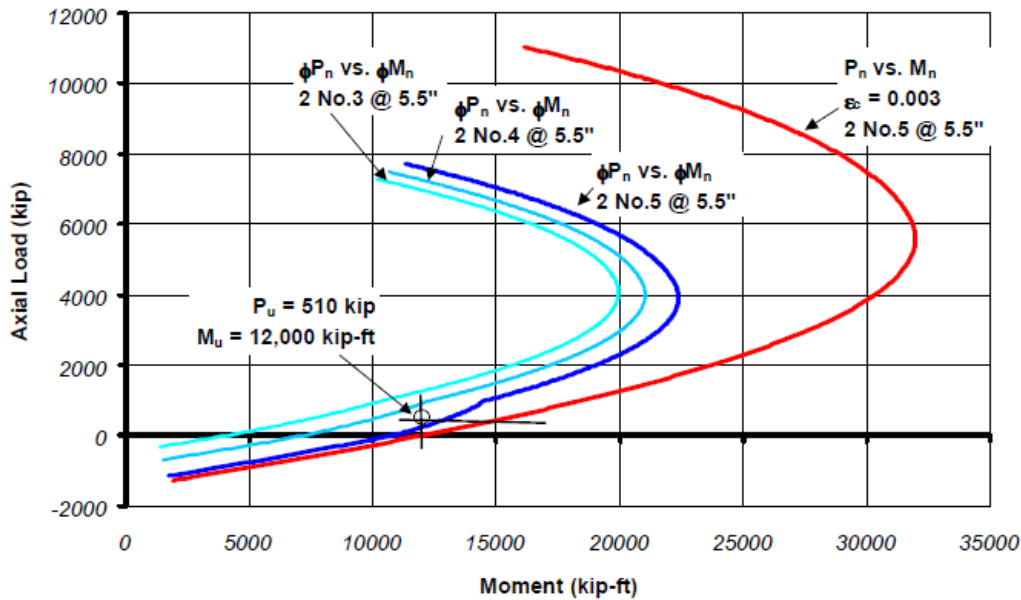


Figura 3 - 75 Ejemplo de diagrama de interacción de muro cortina. Fuente: Tomado de (Garcia, 2008b)

Los muros pueden tener elementos de borde, que sobresalen en sus extremos o embebidos. Para estructuras con capacidad de disipación de energía mínima no son necesarios. Para estructuras con capacidad de disipación de energía moderada y alta son generalmente necesarios, lo cual depende de los niveles de esfuerzos de flexión que tienen que asumir. En la figura y foto se observa claramente un ejemplo de muro con elementos de borde que tiene el refuerzo típico de columnas (flejes más barras longitudinales) y el refuerzo de muros compuesto por malla en ambos lados

3.7.2.3.2 Cortante

En forma similar que para columnas y vigas, los muros deben resistir el cortante teniendo en cuenta el aporte del concreto y el acero. Para la evaluación de la resistencia a cortante proporcionada por el concreto se debe tener en cuenta los siguientes aspectos, según la NSR-10:

- V_n en cualquier sección horizontal para cortante en el plano del muro no debe tomarse mayor que :

$$V_n \leq 0.83\sqrt{f_c}(h)(d) \quad (3 - 91)$$

Donde “h” es el espesor del muro y “d” es la distancia efectiva equivalente a $0.8L_w$, L_w es el ancho del muro.

- V_c , que es la fuerza resistente que proporcional el concreto, debe tomarse como el menor valor entre:

$$V_c = 0.27\lambda\sqrt{f_c}hd + \frac{N_u d}{4l_w} \quad (3 - 92)$$

$$V_c = \left[0.05\lambda\sqrt{f_c} + \frac{l_w \left(0.1\lambda\sqrt{f_c} + 0.2 \frac{N_u}{l_w h} \right)}{\frac{M_u}{V_u} - \frac{l_w}{2}} \right] hd \quad (3 - 93)$$

Donde “Nu” es positivo para compresión y negativo para tracción. Si $(M_u/V_u - l_w/2)$ es negativo, no se puede utilizar la segunda ecuación para evaluar la capacidad a cortante del muro.

- V_s , que es la fuerza resistente que proporcional el acero, debe tomarse como:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (3 - 94)$$

Donde “ A_v ” es el área del refuerzo horizontal a cortante y “ s ” su separación.

- También se deben tener en cuenta las siguientes las disposiciones a utilizar para el refuerzo, cuando:

$V_u < 0.5\phi V_c$ Se deben emplear las disposiciones del numeral C.11.9.9 o el capítulo C.14 de la NSR-10

$V_u \geq 0.5\phi V_c$ Se deben emplear las disposiciones del numeral C.11.9.9

- La cuantía de refuerzo horizontal para cortante debe cumplir con:

$$\rho_t \geq 0.0025$$

- El espaciamiento del refuerzo horizontal para cortante no debe exceder el menor valor de:

$$s \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{lw}{5} \\ 3h \\ 450mm \end{array} \right\}$$

- La cuantía de refuerzo vertical para cortante no debe ser menor que la mayor de 0.0025 o

$$\rho_t = 0.0025 + 0.5 \left[2.5 - \frac{hw}{lw} \right] (\rho_t - 0.0025) \quad (3 - 95)$$

Donde “hw” es la altura total del muro.

- El espaciamiento del refuerzo vertical para cortante no debe exceder el menor valor de:

$$s \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{lw}{3} \\ 3h \\ 450mm \end{array} \right\}$$

3.7.2.3.3 Requisitos mínimos

Adicionalmente a los requisitos que se mencionaron en el numeral anterior, la NSR-10 tiene otros especificadores de refuerzo mínimo en el numeral C.14.3, que se resumen a continuación:

La cuanta mínima para refuerzo vertical es:

- 0.0012 para barras corrugadas no mayores que No. 5 con f_y no menor de 420 Mpa.
- 0.0015 para otras barras corrugadas
- 0.0012 para refuerzo electrosoldado de alambre no mayor que MW200 o MD200

La cuantía mínima para refuerzo horizontal es:

- 0.0020 para barras corrugadas no mayores que No. 5 con f_y no menor de 420 Mpa.
- 0.0025 para otras barras corrugadas
- 0.0020 para refuerzo electrosoldado de alambre no mayor que MW200 o MD200

3.8 ESCALERAS

La escalera es la estructura que tiene como principal objetivo comunicar dos partes diferentes que se hayan separados por una altura determinada. Hay diferentes tipos de escaleras, pero las que más se presentan son las de una sola línea recta (Ver Figura 3 - 76) y las que son en forma de U con su correspondiente descanso (Ver Figura 3 - 77).



Figura 3 - 76 Escalera de una sola línea. Fuente: Tomado Diseño de escaleras de concreto.

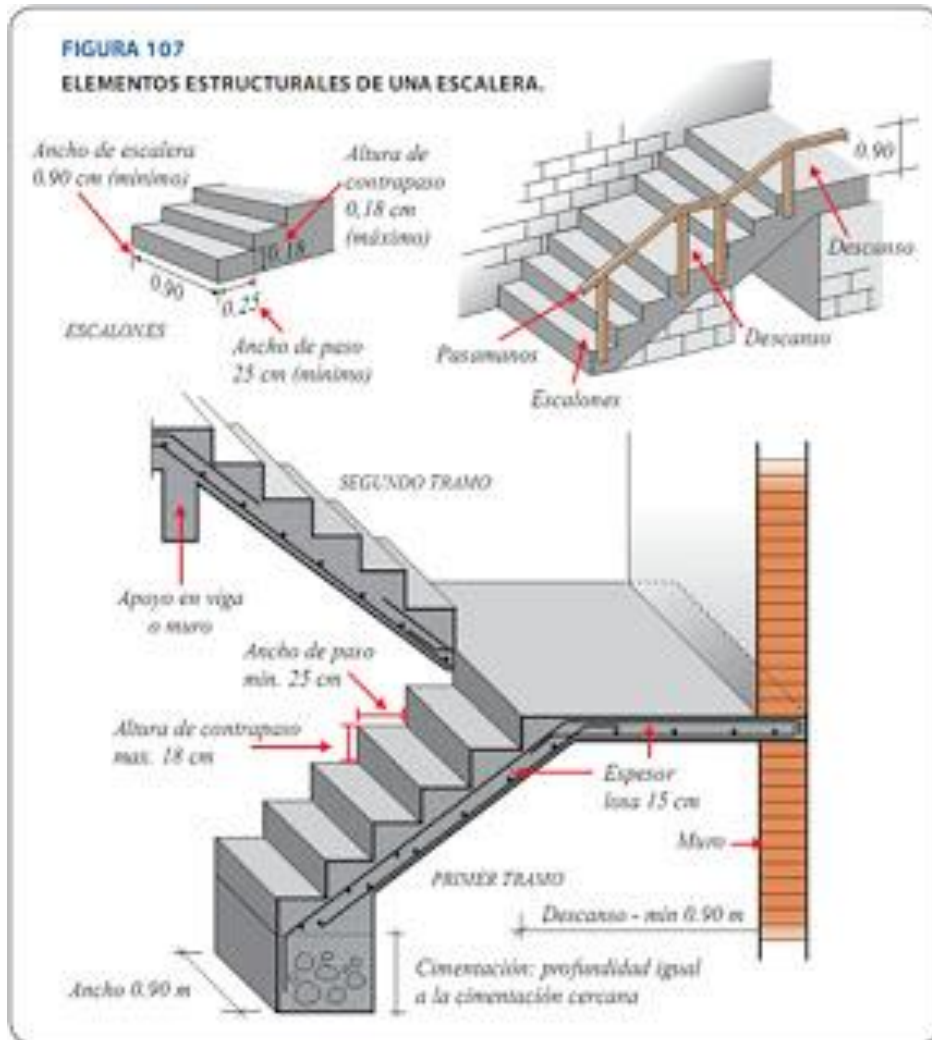


Figura 3 - 77 Escalera en forma de U. Fuente: Tomado de Arquitectura, Estructura y Construcción: DISEÑO DE ESCALERA DE CONCRETO ARMADO.

La escalera está compuesta por peldaños, con huellas que varían entre 0.25 a 0.31 m y contrahuellas de 0.17-0.18 m que representa un ángulo que varía de 30 a 37 grados.

3.8.1 Diseño escalera de una sola línea

Se presenta a continuación una escalera de una sola línea con descanso (Ver Figura 3 - 78), tomada de la referencia (Segura, 2006), la cual se va a diseñar con una carga viva de 3 kN/m² y un cambio en la altura del peldaño(0.17 m).

a. Materiales

La escalera tendrá una resistencia a la compresión del concreto de 21 Mpa y un límite de fluencia de acero de refuerzo de 420 Mpa.

b. Geometría

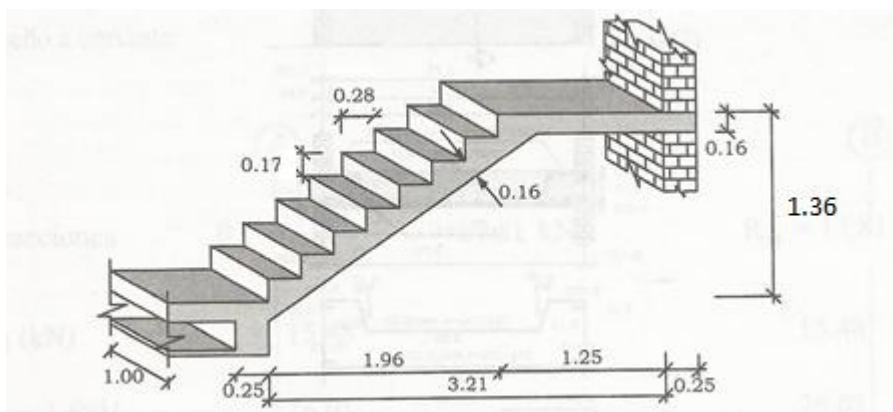


Figura 3 - 78 Geometría de una escalera. Fuente: Adaptada de la (Segura, 2006)

c. Evaluación de cargas

La carga muerta de la zona inclinada es:

Item	Cálculo	Valor de carga vertical (kN/m)
Losa	$0.16 \cdot 24 \cdot 1$	3.84
Peldaños	$(0.17 \cdot 0.28 / 2) \cdot 1 \cdot 24 / 0.28$	2.04
Acabado de granito superior	$0.04 \cdot (0.17 + 0.28) \cdot 1.0 \cdot 22 / 0.28$	1.41
Acabado inferior	$0.03 \cdot 1 \cdot 22$	0.66
Barandas		0.9
		8.85

Tabla 3 - 22 Carga muerta de la zona inclinada.

Item	Cálculo	Valor de carga vertical (kN/m)
Losa	$0.16 \cdot 24 \cdot 1$	3.84
Acabado de granito superior	$0.04 \cdot 1.0 \cdot 22$	0.88
Acabado inferior	$0.03 \cdot 1 \cdot 22$	0.66
Barandas		0.9
		6.28

Tabla 3 - 23 Carga muerta del descanso

De acuerdo al capítulo B.4.2.1 -1, la carga viva de escalera en estructura residencial es de 3 kN/m² y como la escalera de un metro de ancho la carga por metro lineal es de 3 kN/m.

d. Modelo estructural

Se construyó un modelo en SAP-2000, que se presenta continuación:

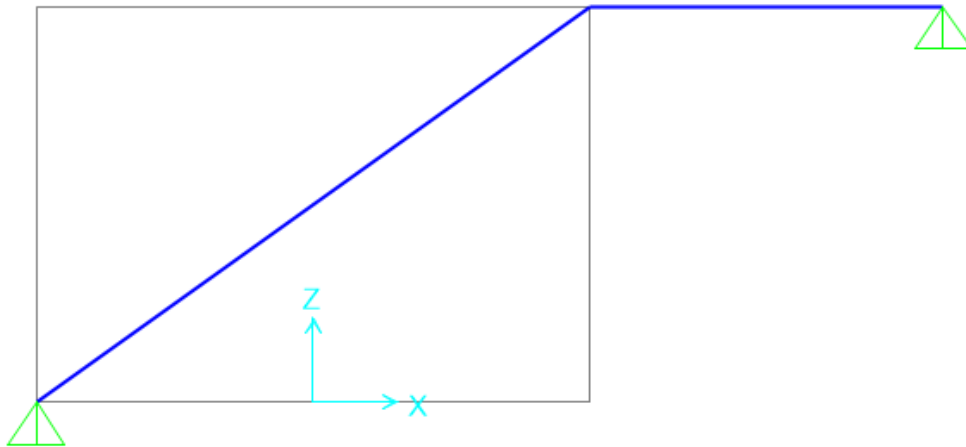


Figura 3 - 79 Modelo estructural en SAP-2000. Fuente: propia

A este modelo se le incluyó la carga muerta antes evaluada:

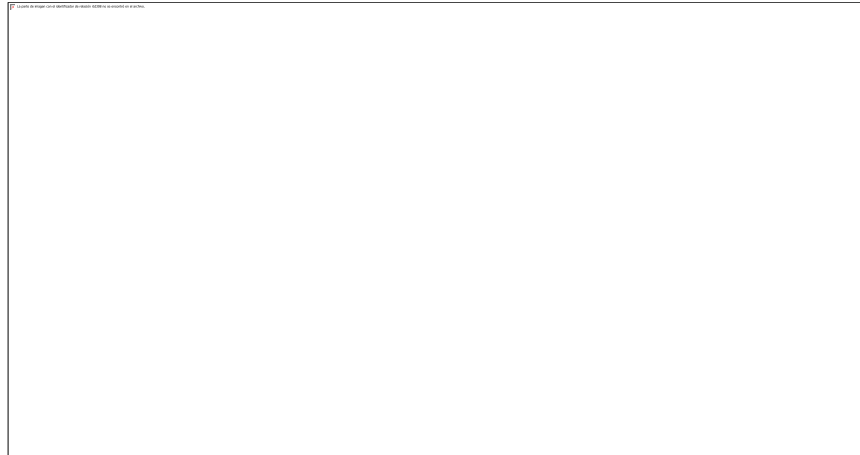


Figura 3 - 80 Carga muerta en el modelo estructural en SAP-2000. Fuente: propia

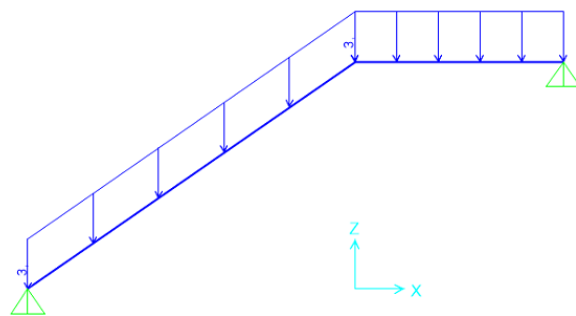


Figura 3 - 81 Carga viva en el modelo estructural en SAP-2000. Fuente: propia

Se presenta a continuación los diagramas de momento y cortante considerando una carga mayorada de $1.2D+1.6L$.

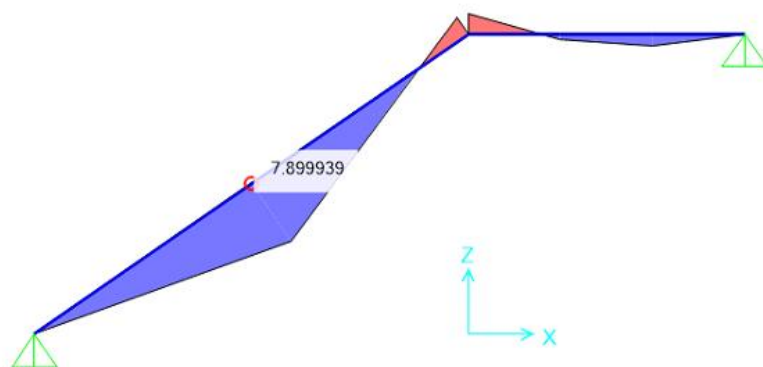


Figura 3 - 82 Diagrama de momento en SAP-2000. Fuente: propia

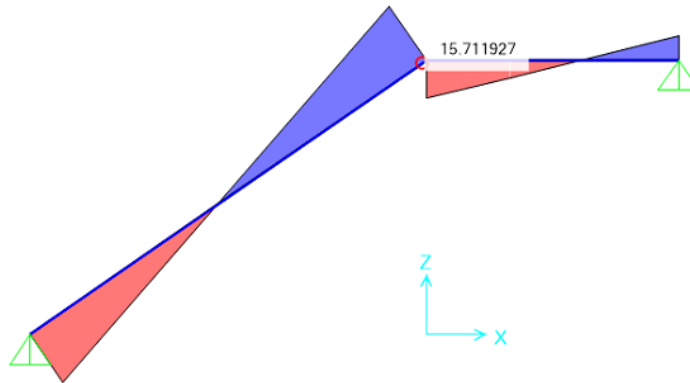


Figura 3 - 83 Diagrama de cortante en SAP-2000. Fuente: propia

e. Diseño a flexión

Se presenta el diseño a flexión:

	d(m)	0.12			
	b(m)	1			
	m	23.52941176			
	Cuantía mínima	0.002			
Item	Mu(kN.m/m)	Rn (Mpa)	Cuantía	Cuantía seleccionada	As(cm2/m)
Cetro luz inclinada	7.9	0.548611111	0.001477018	0.002	2.4
Unión luz inclinada y descanso	2.2	0.152777778	0.000406114	0.002	2.4
Centro descanso	1.4	0.097222222	0.000257985	0.002	2.4

Tabla 3 - 24 Diseño a flexión

Se necesitan flejes de no. 3 cada 0.29 m.

f. Diseño a cortante

Con un cortante mejorado de 15.7 kN, se tiene un valor de Vs negativo, lo que representa que el concreto asume completamente la sollicitación del cortante (no se necesitan flejes)

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c = \frac{15.7}{0.75} - \frac{\sqrt{21}}{6} * 1000 * 0.12 * 100 = -101kN$$

1. 3.9 ESPECIFICACIONES MÍNIMAS DE ELEMENTOS DE CONCRETO

Se presentan recomendaciones de la norma para el dimensionamiento de los diferentes elementos de concreto que hace parte de ediciones.

Entrepisos

Losas macizas en una dirección

Una de las losas macizas es la superior que se apoya en viguetas de sistema de entrepiso que se muestran en la **Figura** **1**. Dicha losa debe tener un espesor mínimo de $t=ls/12$ y no menor de 40 mm empleando bloques de relleno de concreto o arcilla o 50 mm en todos los demás casos.

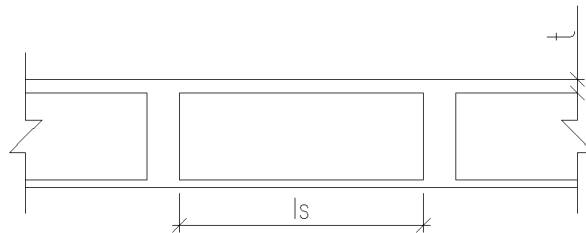


Figura 1 Sección transversal de entrepiso aligerado de losa-viguetas

De esta forma, por ejemplo, si ls es de 0.90 m, el espesor debe ser de un valor redondeado de 0.06 m, ya que depende especialmente de la separación de las viguetas.

Otro caso, son las losas macizas que soportan elementos no estructurales que no son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes, cuyo espesor no puede ser menor a los siguientes límites que se explican en la siguiente tabla:

Tipo de continuidad de los apoyos	Espesor mínimo (h)
Simplemente apoyado	$ls/20$
Un apoyo continuo	$ls/24$
Ambos apoyos continuos	$ls/28$
Voladizos	$ls/10$

Tabla ;Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-1 **Espesores mínimo para losas que no son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes.**
Fuente: Tomado (AIS/ACI/114-17, 2017)

En la **Figura** ;Error! Utilice la pestaña Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.-2 se presenta un caso y es una losa maciza apoyado en dos muros de mampostería que tiene una luz inicial de 4.8 m y un voladizo de 2 m. Aplicando los límites de la tabla anterior, se tiene que la altura de la losa debe ser el mayor valor entre: $4.85/24$ y $2/10$ para lo cual da una altura mínima de la losa de 0.21 m.

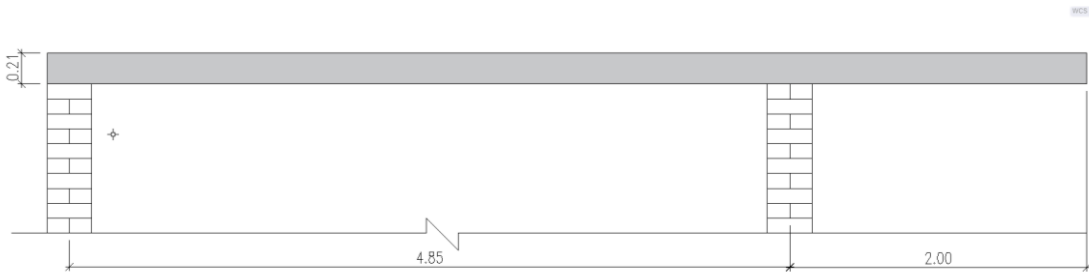


Figura ;Error! Utilice la pestaña Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.-2 **Perfil de losa maciza**

También, losas macizas que soportan elementos no estructurales que son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes, cuyo espesor no puede ser menor a los siguientes límites que se explican en la siguiente tabla:

Tipo de continuidad de los apoyos	Espesor mínimo (h)
Simplemente apoyado	$l_s/14$
Un apoyo continuo	$l_s/16$
Ambos apoyos continuos	$l_s/19$
Voladizos	$l_s/7$

Tabla ;Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-2 **Espesores mínimo para losas que son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes.**
Fuente: Tomado (AIS/ACI/114-17, 2017)

Si fuera el mismo caso anterior y aplicando los límites de la **Tabla** ;Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-2, el espesor mínimo necesario sería de 0.30 metros.

Vigas maestras, vigas y viguetas en una dirección

Para vigas maestras, vigas o viguetas que soportan elementos no estructurales que no son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes, cuyo espesor no puede ser menor a límites que se explican en la siguiente tabla:

Tipo de continuidad de los apoyos	Espesor mínimo (h)
Simplemente apoyado	ls/16
Un apoyo continuo	Ls/18.5
Ambos apoyos continuos	Ls/21
Voladizos	Ls/8

Tabla ¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-3 **Espesores mínimo para vigas maestras, vigas o viguetas que no son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes. Fuente: Tomado (AIS/ACI/114-17, 2017)**

Y también para estos mismos elementos que soportan elementos no estructurales que son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes, cuyo espesor no puede ser menor a límites que se explican en la siguiente tabla:

Tipo de continuidad de los apoyos	Espesor mínimo (h)
Simplemente apoyado	ls/11
Un apoyo continuo	Ls/12
Ambos apoyos continuos	Ls/14
Voladizos	Ls/5

Tabla ¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-4 **Espesores mínimo para vigas maestras, vigas o viguetas que son susceptibles a dañarse debido a las deflexiones grandes. Fuente: Tomado (AIS/ACI/114-17, 2017)**

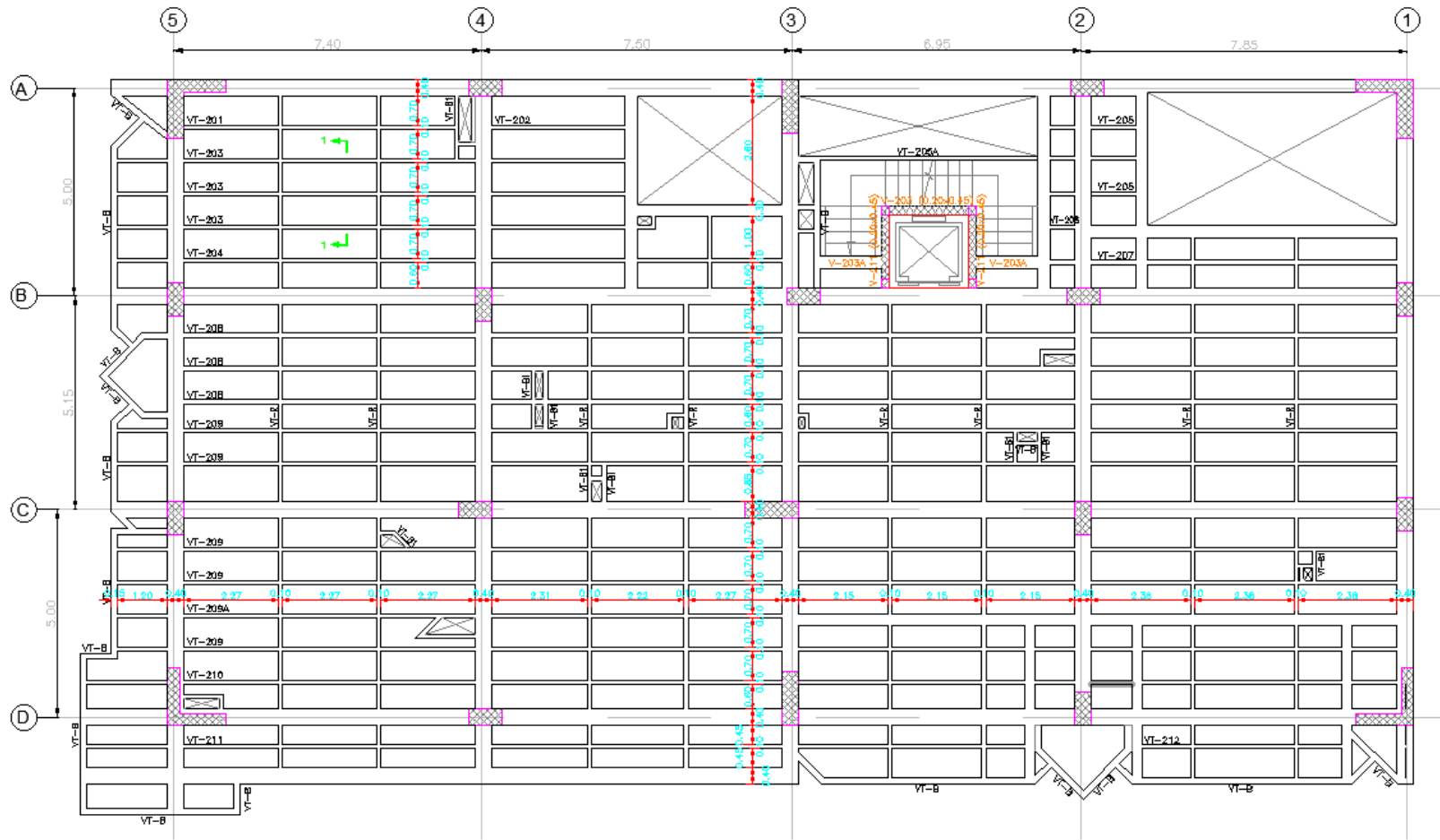


Figura ¡Error! Utilice la pestaña Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.-3 Planta títica de edificio

4. REFERENCIAS

- ACI-318-25. (2025). *Código de concreto estructural actualizado en Español*.
- AIS/ACI/114/Colombia. (2017). *Requisitos esenciales para edificaciones de concreto reforzado de tamaño y altura limitado*.
- ASTM-C39/C39M-18. (2018). *Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens*.
- ASTM C78/C78M-22. (2022). *ASTM C78/C78M-22. Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete (Using Simple Beam with Third-Point Loading)*. West Conshohocken.
- C469-14, A. (2014). *Standard Test Method for Static Modulus of Elasticity and Poisson's Ratio of Concrete in Compression*. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2014, DOI: 10.1520/C0469_C0469M-10, www.astm.org.
- Diacó, G.-. (2015). *Portafolio de producto DIACO*.
- García, L. (2008a). *Seminario sobre el ACI-318 – Diseño de muros en concreto reforzado*.
- García, L. (2008b). *Seminario sobre el ACI-318 – Diseño de muros en concreto reforzado*.
- García Reyes, L. E. (2014). *Curso de comportamiento inelástico de estructuras de concreto – Rigidez de elementos de concreto reforzado* (Un. de los Andes, Ed.).
- Gere, J. (2006). *Mecánica de materiales*.
- Guzmán, D. S. (1996). *Tecnología del concreto y del mortero*.

- Hognested, E. (1956). Ultimate strenght reinforced concrete in American design practice. *Portland Cement Association, Concrete Structures*.
- INVIAS/AIS/NSR-10. (2010). *Reglamento Colombiano de construcciones sismo resistente*.
- Kent, D., & Park, R. (1971). *Flexural Members with Confined Concrete*. *ASCE Journ.*
- McCormac, J., & Russell, B. (2009). *Diseño de Concreto Reforzado* (Editorial).
- Muñoz, E. (2011). *Ingeniería de Puentes –Tomo 1 y 2*.
- Muñoz, E. E., Nuñez, F., & Antonio, M. (2014). *Capítulo 1 – Conceptos básicos de confiabilidad estructural del libro Ingeniería de Puentes –Tomo 3*. *Pontificia Universidad Javeriana*.
- Nawy, E. (1998). *Concreto Reforzado. Un enfoque básico* (Editorial).
- Peck, R. B., Hanson, W. E., & Trotnburn, T. H. (1974). *Foundation Engineering, 2ª, e.d.*
- Rochel, R. A. (1998). *Hormigón reforzado* (U. EAFIT, Ed.).
- Sandra Suarez. (2010). *Sistema didáctico de diseño y construcción de edificios en concreto reforzado*.
- Segura, J. (2006). *Estructuras de Concreto I* (Facultad d).
- Trujillo, O. (2000). *Puentes*. *Universidad Industrial de Santander*.
- Uribe, J. (1991). *Análisis de estructuras* (UNIANDES).